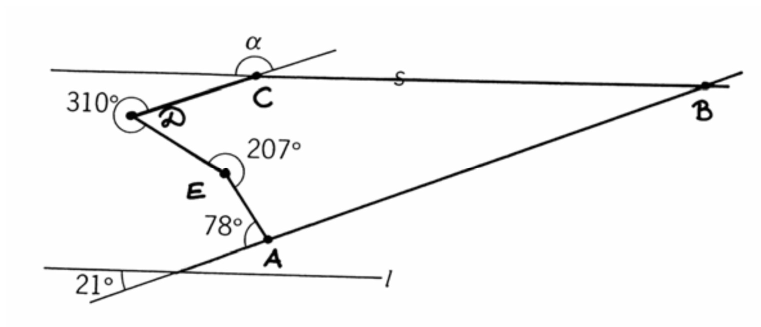
Övningsprov

Prov 1

1

a)



Vi förlänger det vänstra vinkelbenet till vinkeln 78° så att det skär linjen s. Vi undersöker femhörningen $ABCDE$.
Vinkelsumman är

$(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$	$(n-2)\cdot 180^\circ$
$\sphericalangle EAB = 180 - 78^\circ = 102^\circ$	sidovinklar
$\sphericalangle ABC = 21^\circ$	alternatvinklar och $l \parallel s$
$\sphericalangle BCD = \alpha$	vertikalvinklar
$\sphericalangle CDE = 360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$	full vinkel
$\sphericalangle DEA = 207^\circ$	

Vi får ekvationen

$$102^\circ + 21^\circ + \alpha + 50^\circ + 207^\circ = 540^\circ$$
$$380^\circ + \alpha = 540^\circ$$
$$\alpha = 160^\circ$$

b) Anta att n $(n \geq 3)$ är antalet hörn i månghörningen.
Vi får olikheten

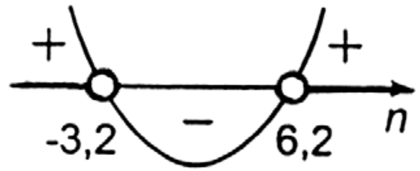
$$\frac{n(n-3)}{2} > 10 \qquad \Big| \cdot 2\ (>0)$$
$$n(n-3) > 20$$
$$n^2 - 3n - 20 > 0$$

Nollställen:

$$n^2 - 3n - 20 = 0$$
$$n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(20)}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{2}$$
$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{3+\sqrt{89}}{2} \approx 6,2 \\ n_2 = \dfrac{3-\sqrt{89}}{2} \approx -3,2 \end{cases}$$

Olikheten är uppfylld om

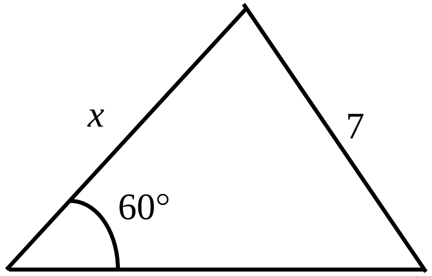
$n < -3,2$ eller $n > 6,2$



Eftersom $n \geq 3$, duger värdena $n = 7, 8, 9, \ldots$.

Svar a) $\alpha = 160^\circ$
b) En månghörning som har åtminstone 7 sidor.

2



Cosinussatsen ger

$$7^2 = 8^2 + x^2 - 2\cdot 8\cdot x\cos 60^\circ$$

$$49 = 64 + x^2 - 16x\cdot\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x = \frac{8\pm\sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{8\pm 2}{2}$$

$$x = 5 \quad \text{eller} \quad x = 3$$

Svar 3 eller 5

3

$A_b = 8{,}0 \text{ cm}^2$

$s = 5{,}0 \text{ cm}$

Cylinderns höjd:

$$\sin 70^\circ = \frac{h}{5{,}0}$$

$$h = 5{,}0\cdot\sin 70^\circ = 4{,}698\ldots\ (\text{cm})$$

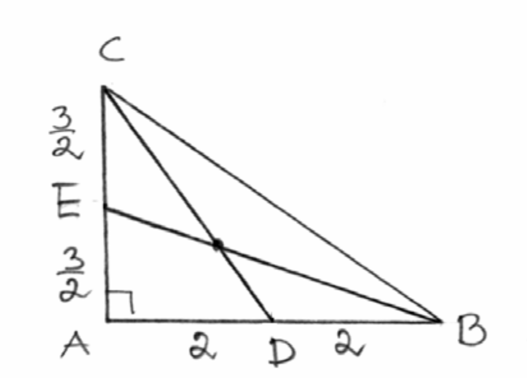
Cylinderns höjd är

$$V = A_b h = 8{,}0\cdot 5{,}0\cdot\sin 70^\circ = 37{,}58\ldots \approx 38\ (\text{cm}^3)$$

Svar 38 cm^3

4

a)



Medianen CD delar sidan AB i delarna

$$AD = DB = 2$$

Medianen BE delar sidan AC i delarna

$$AE = EC = \frac{3}{2}$$

Triangeln ADC ger med Pythagoras sats

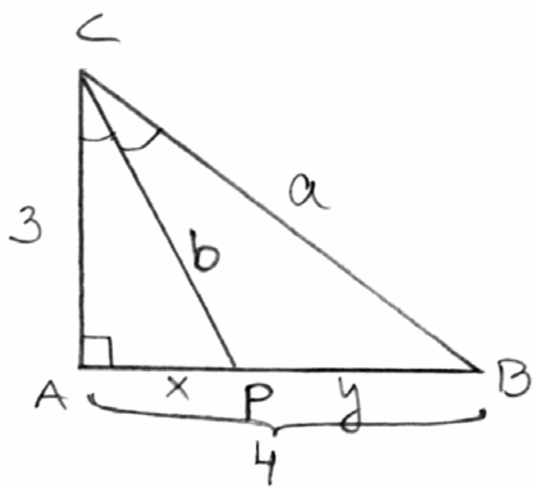
$$|CD|^2 = 2^2 + 3^2$$
$$|CD|^2 = 4 + 9$$
$$|CD|^2 = 13$$
$$|CD| = {}_{(}\pm_{)}\sqrt{13}$$

Triangeln ABE ger med Pythagoras sats

$$|BE|^2 = 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$|BE|^2 = {}^{4)}16 + \frac{9}{4}$$
$$|BE|^2 = \frac{73}{4}$$
$$|BE| = {}_{(}\pm_{)}\frac{\sqrt{73}}{2}$$

b)
Pythagoras sats ger

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$
$$a^2 = 9 + 16$$
$$a^2 = 25$$
$$a = {}_{(}\pm_{)}5$$



Bisektrissatsen ger

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{5}{3}x$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1) & y = \frac{5}{3}x \\ (2) & x + y = 4 \end{cases} \quad \Big| \text{insättning i ekvation } (1)$$

$$x + \frac{5}{3}x = 4 \quad \Big| \cdot 3$$

$$3x + 5x = 12$$

$$8x = 12$$

$$x = \frac{12}{8}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Triangeln APC ger

$$b^2 = x^2 + 3^2 \quad \Big| x = \frac{3}{2}$$

$$b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9$$

$$b^2 = \frac{9}{4} + {}^{4)}9$$

$$b^2 = \frac{45}{4}$$

$$b = {}_{(\pm)}\sqrt{\frac{9 \cdot 5}{4}}$$

$$b = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Svar a) $CD = \sqrt{13}$ och $BE = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$

b) Bisektrisens längd är $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

5

$d = 12\ 756\ (\text{km})$

$R = \dfrac{d}{2} = 6\ 378\ (\text{km})$

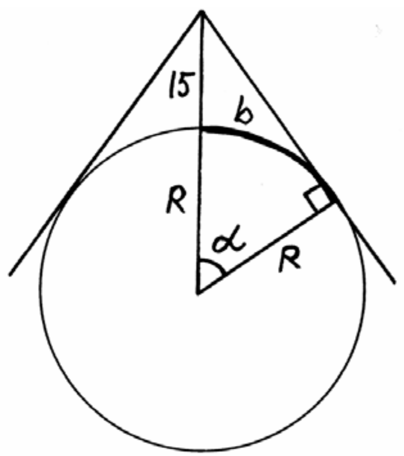
Vi bestämmer vinkeln α i den rätvinkliga triangeln

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+15}$$

$$\cos\alpha = \frac{6\ 378}{6\ 393}$$

$$\alpha = 3{,}925...^\circ$$

$$\alpha \approx 3{,}9^\circ$$



Sträckan b, som båten måste färdas är

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi R$$

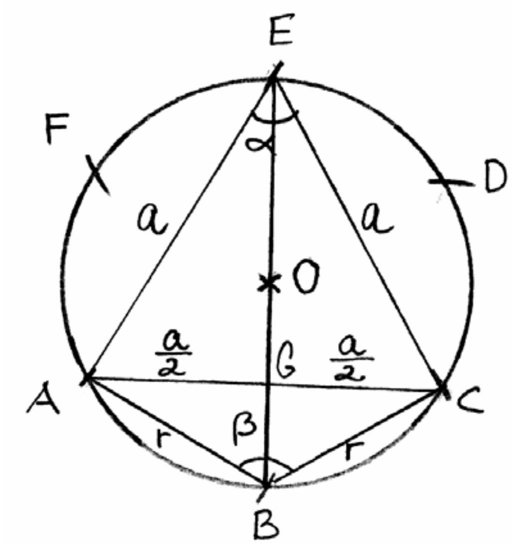
$$= 436{,}996...$$

$$\approx 440\ (\text{km})$$

Svar 440 km

6

Alternativ 1:



Triangeln ACE är liksidig eftersom sidorna AC, CE och EA är kordor till lika långa bågar $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{CDE}$ och $\overset{\frown}{EFA}$.

Alltså är
$\sphericalangle AEC = 60^\circ$ eller $\alpha = 60^\circ$.

Då är

$\overset{\frown}{ABC} = 2\alpha = 120^\circ$ | bågvinkelns gradtal är hälften av gradtalet för motsvarande båge

vilket ger

$$\overset{\frown}{AEC} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

Alltså är

$$\sphericalangle ABC = 120^\circ \text{ eller } \beta = 120^\circ.$$

Anta att längden av sidorna i triangeln ACE är a.
Triangeln ABC ger med cosinussatsen

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\beta \qquad \left| \beta = 120^\circ \right.$$

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ \qquad \left| \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \right.$$

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 = 2r^2 + r^2$$

$$a^2 = 3r^2$$

$$a = _{(}\pm_{)} \sqrt{3}r$$

Arean av triangeln ACE är

$$A = \frac{1}{2} ab \sin\alpha \qquad \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{3}r,\ b = \sqrt{3}r \\ \alpha = 60^\circ \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot \sqrt{3}r \cdot \sin 60^\circ \qquad \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$$

Alternativ 2
Triangeln ACE är liksidig eftersom sidorna AC, CE och EA är kordor till lika långa bågar $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{CDE}$ och $\overset{\frown}{EFA}$. Medelpunkten i den omskrivna cirkeln för en liksidig triangeln är medianernas skärningspunkt.
Punkten O delar medianerna i förhållandet 2:1. Alltså är
$EO = \frac{2}{3} m$.

I en liksidig triangel sammanfaller medianen med höjden, vilket ger

$$m = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad \left| \text{ se boken s. 40} \right.$$

och då är

$$EO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Å andra sidan är $EO = r$, vilket ger

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = r \qquad |\cdot 3$$

$$a\sqrt{3} = 3r \qquad |/\sqrt{3}$$

$$a = {}^{\sqrt{3})}\frac{3r}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}r}{3}$$

$$= \sqrt{3}r$$

Arean av triangeln ACE är

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\alpha \qquad \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{3}r,\ b = \sqrt{3}r \\ \alpha = 60^\circ \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot \sqrt{3}r\sin 60^\circ \qquad \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

Svar Exakta värdet för triangelns area är $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

7

Jordglobens omkrets är $57{,}5 \text{ cm} = 0{,}575 \text{ m}$.

Jordens omkrets är $2\pi \cdot 6\ 400 \text{ km} = 12\ 800\ 000\pi \text{ m}$.

Jordglobens skala är

$$k = \frac{0{,}575 \text{ m}}{12\ 800\ 000\pi \text{ m}} \approx \frac{1}{70\ 000\ 000}$$

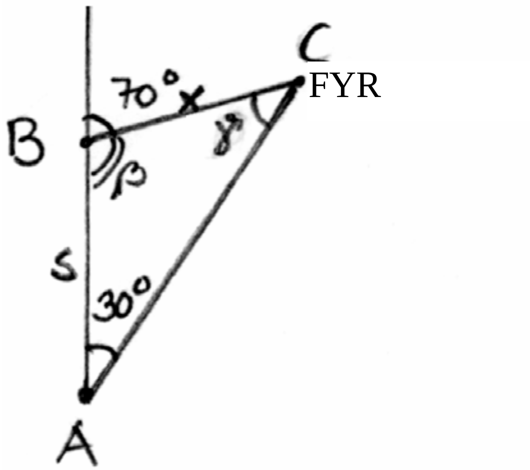
Arean A av Frankrike får vi ur förhållandet

$$\frac{1 \text{ cm}^2}{A} \approx \left(\frac{1}{70\ 000\ 000}\right)^2$$

$$A \approx 70\ 000\ 000^2 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 490\ 000 \text{ km}^2$$

Svar Skalan är 1:70 000 000.
Frankrikes area är $490\ 000 \text{ km}^2$.

8



Anta att fartygets avstånd från fyren är *x* och att den sträcka som fartyget har rört sig är $AB = s$. Enheten är km.

$$v = 18\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$t = 20\ \text{min} = \frac{20}{60}\ \text{h} = \frac{1}{3}\ \text{h}$$

$$\begin{aligned} s &= v \cdot t \\ &= 18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{3}\ \text{h} \\ &= 6\ \text{km} \end{aligned}$$

$\beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ |sidovinklar

Vinkelsumman i en triangel är 180°, vilket ger

$$30^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \left|\beta = 110^\circ\right.$$

$$30^\circ + 110^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 40^\circ$$

Sinussatsen ger

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{s}{\sin \gamma} \qquad \left| \begin{array}{l} s = 6\ \text{(km)} \\ \gamma = 40^\circ \end{array} \right.$$

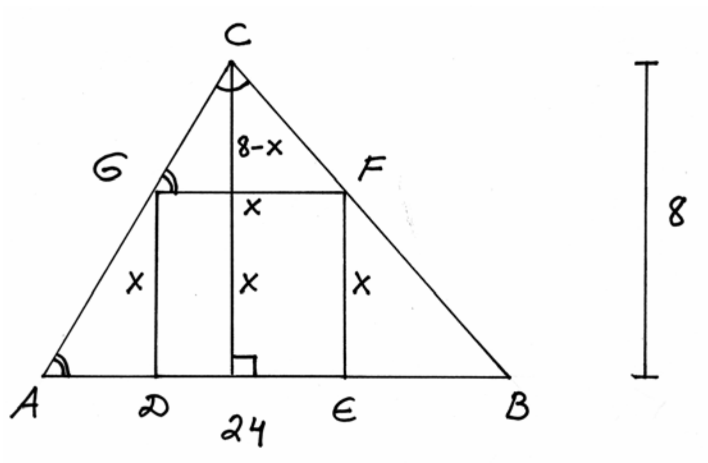
$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 40^\circ}$$

$$x = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \qquad \left| \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \right.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}642...} \\ &= 4{,}667... \\ &\approx 4{,}7\ \text{(km)} \end{aligned}$$

Svar Fartygets avstånd från fyren är 4,7 km.

9



$$\triangle GFC \sim \triangle ABC \ \text{(vv)}$$

Eftersom förhållandet mellan motsvarande sidor är konstant får vi att

$$\frac{8-x}{8} = \frac{x}{24}$$

| Kvoten mellan höjderna är densamma som kvoten mellan baserna.

$$8 \cdot x = 24 \cdot (8-x)$$

$$8x = 192 - 24x$$

$$32x = 192$$

$$x = \frac{192}{32}$$

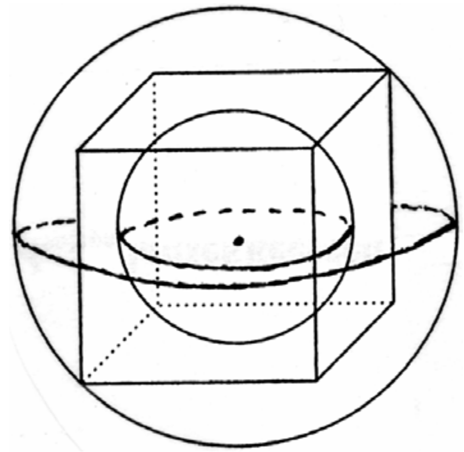
$$x = 6$$

Alltså är

$$\frac{A_{\text{kvadrat}}}{A_{\text{triangel}}} \cdot 100\ \% = \frac{6^2}{\frac{24 \cdot 8}{2}} \cdot 100\ \% = \frac{36}{12 \cdot 8} \cdot 100\ \% = 37{,}5\ \%$$

10

En regelbunden hexaeder eller kub



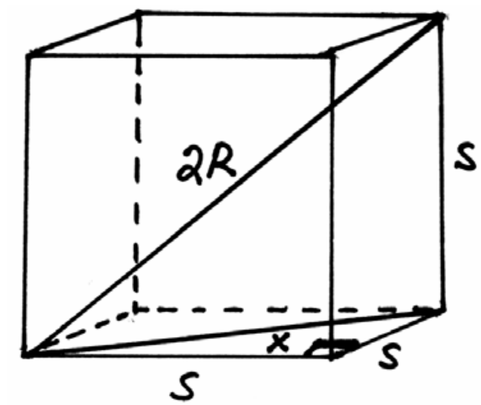
kubens kantlängd s
den mindre sfärens radie r
den större sfärens radie R

Vi bestämmer sfärernas radier med hjälp av längden av kubens kant.

Den mindre sfärens diameter är samma som kubens kantlängd.

Alltså är $2r = s$ eller $r = \dfrac{s}{2}$.

Den större sfärens diameter är samma som rymddiagonalen i kuben.



$$x^2 = s^2 + s^2$$

$$x^2 = 2s^2$$

$$x = s\sqrt{2}$$

$$2R = \sqrt{x^2 + s^2}$$

$$= \sqrt{2s^2 + s^2}$$

$$= s\sqrt{3}$$

Alltså är $R = \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$

Alternativ 1
Sfärerna är likformiga.
Radiernas förhållande är

$$k = \frac{r}{R} = \frac{s}{2} : \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{2}{s\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a) Areornas förhållande är

$$\frac{A_{\text{liten sfär}}}{A_{\text{stor sfär}}} = k^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

b) Volymernas förhållande är

$$\frac{V_{\text{liten sfär}}}{V_{\text{stor sfär}}} = k^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Alternativ 2
a) Den mindre sfärens area är

$$A_{\text{liten sfär}} = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \pi s^2$$

Den större sfärens area är

$$A_{\text{stor sfär}} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi s^2$$

Areornas förhållande är

$$\frac{A_{\text{liten sfär}}}{A_{\text{stor sfär}}} = \frac{\pi s^2}{3\pi s^2} = \frac{1}{3}$$

b) Den mindre sfärens volym är

$$V_{\text{liten sfär}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{s}{2}\right)^3 = \frac{\pi s^3}{6}$$

Den större sfärens volym är

$$V_{\text{stor sfär}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{s^3 3\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi s^3\sqrt{3}}{2}$$

Volymernas förhållande är

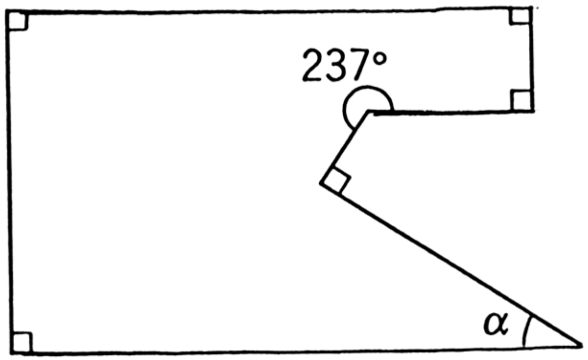
$$\frac{V_{\text{liten sfär}}}{V_{\text{stor sfär}}} = \frac{\pi s^3}{6} : \frac{\pi s^3\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi s^3}{6} \cdot \frac{2}{\pi s^3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Svar a) 1:3 b) $1:3\sqrt{3}$

Prov 2

1

a)



Sjuhörningens vinkelsumma är

$(7-2)\cdot 180^\circ = 900^\circ \qquad \left|(n-2)\cdot 180^\circ\right.$

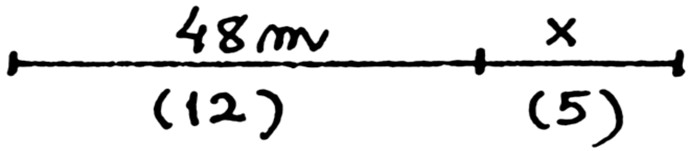
Vi får ekvationen

$$4\cdot 90^\circ + 237^\circ + 270^\circ + \alpha = 900^\circ$$
$$867^\circ + \alpha = 900^\circ$$
$$\alpha = 33^\circ$$

Antalet diagonaler i sjuhörningen är

$$\frac{7(7-3)}{2} = 14 \qquad \left|\frac{n(n-3)}{2}\right.$$

b) Vi ritar en figur.



Sträckans delningsförhållande ger kvoten

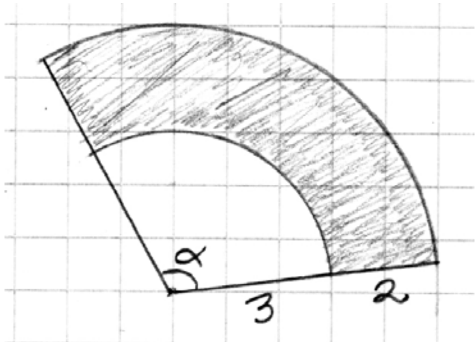
$$\frac{48\ \text{m}}{x} = \frac{12}{5}$$
$$x = \frac{5\cdot 48\ \text{m}}{12} = 20\ \text{m}$$

Granhäckens totallängd är $48\ \text{m} + 20\ \text{m} = 68\ \text{m}$

Svar a) $\alpha = 33^\circ$, antalet diagonaler är 14 b) 68 m

2

Vi betecknar sektorns medelpunktvinkel med α och sektorernas radier med r_1 och r_2, $r_1 = 3$, $r_2 = 5$.



Arean av det skuggade området är skillnaden mellan sektorernas areor. Vi får ekvationen

$$\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 5^2 - \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 3^2 = 9$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi\cdot(25-9) = 9$$

$$\frac{\alpha\cdot\pi\cdot 16}{360^\circ} = 9 \qquad \Big|\cdot\frac{360^\circ}{\pi\cdot 16}$$

$$\alpha = 9\cdot\frac{\cancelto{90^\circ}{360^\circ}}{\pi\cdot\cancelto{4}{16}}$$

$$\alpha = \frac{810^\circ}{4\pi}$$

Omkretsen av det skuggade området är

$$\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r_1 + \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r_2 + 2\cdot 2$$

$$= \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi\left(r_1 + r_2\right) + 4 \qquad \Bigg| \; r_1 = 3,\ r_2 = 5,\quad \alpha = \frac{810^\circ}{4\pi}$$

$$= \frac{\frac{810^\circ}{4\pi}}{360^\circ}\cdot 2\pi(3+5) + 4$$

$$= \frac{\cancelto{9}{810^\circ}}{\cancel{4}\,\cancel{\pi}\cdot\cancelto{\cancel{4}}{360^\circ}}\cdot\cancel{2}\,\cancel{\pi}\cdot\cancelto{\cancel{2}}{8} + 4$$

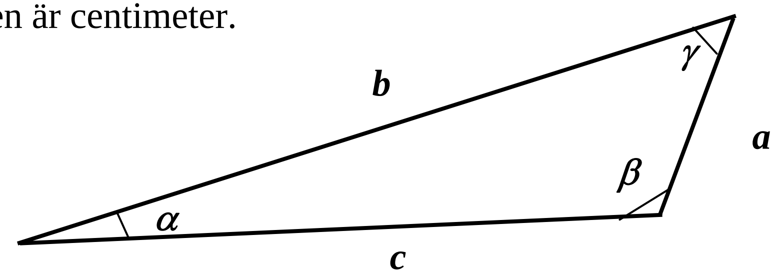
$$= 9 + 4 = 13$$

Svar Omkretsen är 13.

3

Längdenheten är centimeter.

$a = 10,0$
$b = 28$
$\alpha = 20°$



Vi bestämmer vinkeln β med sinussatsen.

$$\frac{10,0}{\sin 20^\circ} = \frac{28}{\sin \beta}$$

$$10,0 \cdot \sin \beta = 28 \sin 20^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{28 \sin 20^\circ}{10,0}$$

$$\beta = 73,266...^\circ \quad \text{eller} \quad \beta = 180^\circ - 73,266...^\circ = 106,733...^\circ$$

om $\beta = 73,266...^\circ$ så är $\gamma = 86,733...^\circ$

om $\beta = 106,733...^\circ$ så är $\gamma = 53,266...^\circ$

Eftersom triangeln är trubbvinklig så duger endast $\beta = 106,733...°$ och $\gamma = 53,266...°$ som lösning.

Vi bestämmer sidan c med cosinussatsen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c = _{(}\pm_{)}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$c = \sqrt{10,0^2 + 28^2 - 2 \cdot 10,0 \cdot 28 \cdot \cos 53,266...°}$$

$$c = 20,861... \text{ (cm)}$$

Triangelns area är

$$A_{\text{triangel}} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 20,861... \cdot \sin 20^\circ = 99,89... \approx 100 \left(\text{cm}^2\right)$$

Svar $\quad c \approx 21$ cm, $\beta \approx 107°$, $\gamma \approx 53°$, area 100 cm^2

4

Anta att x är den höjd som är ritad mot ett ben och att höjden h är ritad mot basen.

Enligt Pythagoras sats är

$$h^2 + 6^2 = 10^2$$

$$h^2 = 100 - 36$$

$$h^2 = 64$$

$$h_{(}\pm_{)}8$$

Triangelns area är

$$A = \frac{a \cdot h}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} a = 12 \\ h = 8 \end{array} \right.$$

$$= \frac{12 \cdot 8}{2}$$

$$= 48$$

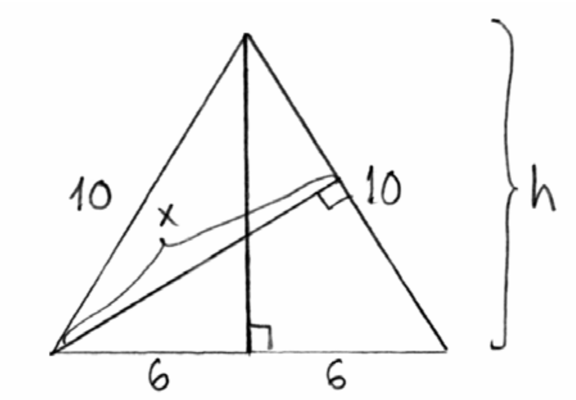
Å andra sidan är

$$A = \frac{10 \cdot x}{2} = 5x.$$

Alltså är

$$5x = 48$$

$$x = 9\frac{3}{5}$$



Svar Höjdens längd är $9\frac{3}{5}$.

5

Vi betecknar det vågräta avståndet mellan punkten A och radiomasten C med x.
Enheten är kilometer.

a)

Vi bestämmer x med sinussatsen

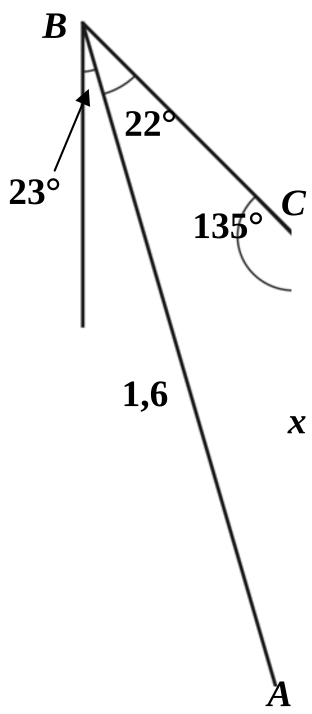
$$\frac{x}{\sin 22°} = \frac{1,6}{\sin 135°}$$

$$x \sin 135° = 1,6 \sin 22°$$

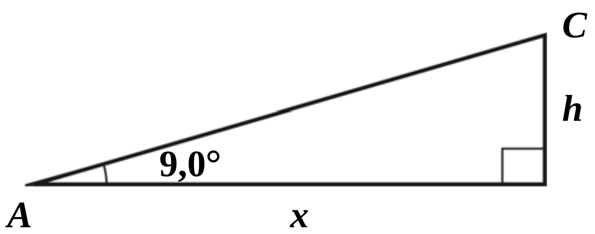
$$x = \frac{1,6 \sin 22°}{\sin 135°}$$

$$x = 0,8476...$$

$$x \approx 0,85 \text{ (km)}$$



b)



Vi beräknar mastens höjd *h* ur ekvationen

$$\tan 9,0° = \frac{h}{x}$$

$$h = x \tan 9,0°$$

$$h = \frac{1,6 \sin 22°}{\sin 135°} \cdot \tan 9,0°$$

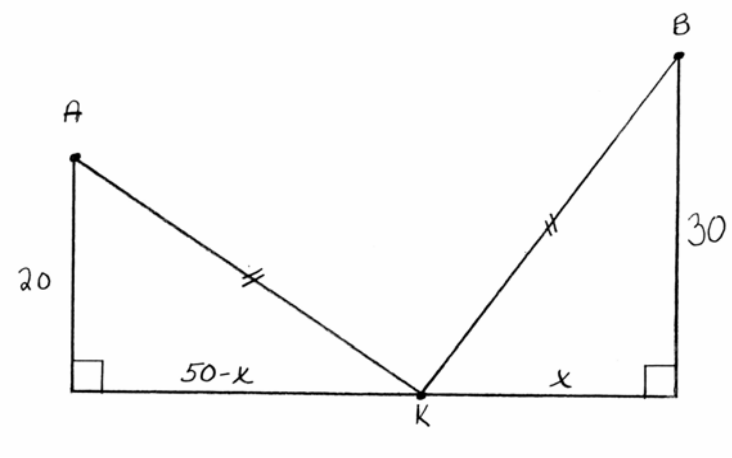
$$h = 0,1342...$$

$$h \approx 0,13 \text{ (km)}$$

Svar a) Det vågräta avståndet är 850 m.
b) Mastens höjd är 130 m.

6

Ur den vänstra rätvinkliga triangeln får vi med Pythagoras sats ekvationen



$$KA^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

På samma sätt ger den högra triangeln $KB^2 = 30^2 + x^2$

Enligt antagandet är $KA = KB$, vilket ger att $KA^2 = KB^2$ eftersom $KA > 0$ och $KB > 0$.

Vi bestämmer x ur ekvationen

$$20^2 + (50 - x)^2 = 30^2 + x^2$$

$$20^2 + 50^2 - 2 \cdot 50x + x^2 = 30^2 + x^2$$

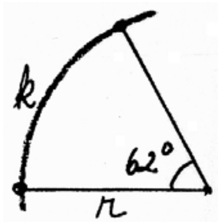
$$100x = 20^2 + 50^2 - 30^2$$

$$x = \frac{20^2 + 50^2 - 30^2}{100} = 20$$

Svar Fisken befinner sig 20 alnar från foten av den högre palmen.

7

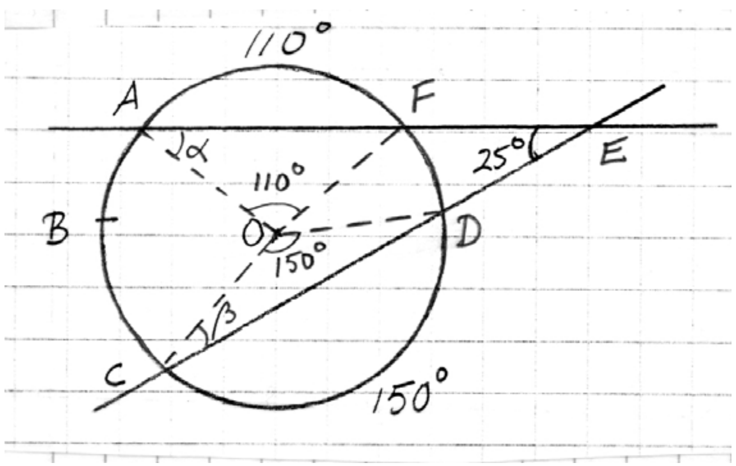
$$k = \frac{62^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6\,400$$
$$= 6\,925{,}4...$$
$$\approx 6\,900 \text{ (km)}$$



Svar Parkano är 6 900 km norr om ekvatorn.

8

Den medelpunktsvinkel *AOF* som svarar mot bågen *AF* är också 110° och medelpunktsvinkeln *COD* som svarar mot bågen *CD* är 150°.
Trianglarna *AOF* och *COD* är likbenta eftersom deras ben är radier i cirkeln. Basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.



Vi får

$$\alpha = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$$
$$\beta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

Vinkelsumman i en fyrhörning är 360°.
Fyrhörningen *OCEA* ger att

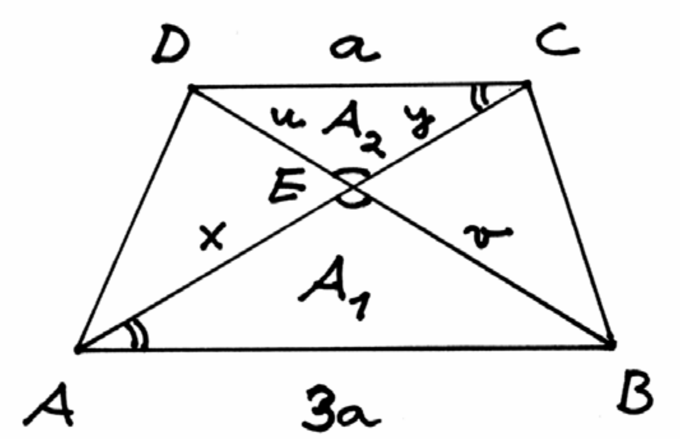
$$\sphericalangle AOC + \beta + 25^\circ + \alpha = 360^\circ$$
$$\sphericalangle AOC + 15^\circ + 25^\circ + 35^\circ = 360^\circ$$
$$\sphericalangle AOC = 360^\circ - 15^\circ - 25^\circ - 35^\circ$$
$$\sphericalangle AOC = 285^\circ$$

Medelpunktsvinkeln som svarar mot bågen *ABC* är

$$360^\circ - 285^\circ = 75^\circ$$

Svar Gradtalet för bågen *ABC* är 75°.

9



a) $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ (vv), eftersom

1) $\angle EAB = \angle ECD$ | alternatvinklar och $AB \parallel DC$

2) $\angle AEB = \angle DEC$ | vertikalvinklar

Motsvarande sidor är proportionella vilket ger

$$\frac{x}{y} = \frac{3a}{a} \qquad \text{ja} \qquad \frac{v}{u} = \frac{3a}{a}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1} \qquad \frac{v}{u} = \frac{3}{1}$$

Alltså delar diagonalerna varandra i förhållandet 3:1 räknat från det hörn som ligger på den längre basen .

b) Skalan för de likformiga trianglarna är $k = 3:1$, vilket ger att förhållandet mellan areorna är

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = 9$$

$$A_1 = 9A_2$$

Vi får ekvationen

$$A_1 + A_2 = 40 \qquad \left| A_1 = 9A_2\right.$$

$$9A_2 + A_2 = 40$$

$$10A_2 = 40$$

$$A_2 = 4$$

Då är $A_1 = 40 - A_2 = 40 - 4 = 36$

Svar a) 3:1 räknat från hörnet på den längre basen

b) Arean av triangeln ABE är 36 a.e. och arean av triangeln CDE är 4 a.e.

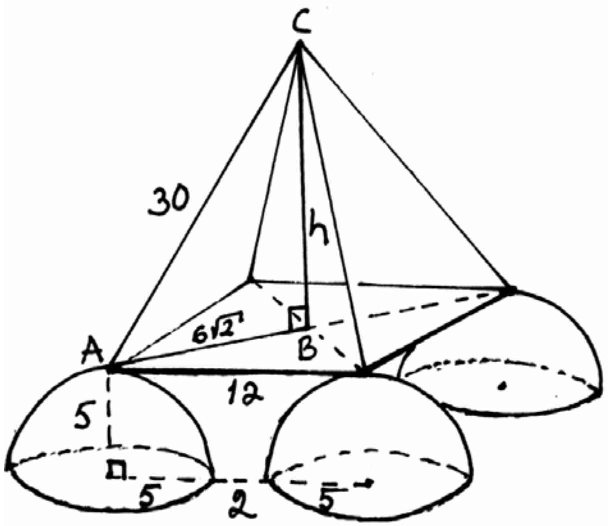
10

Pyramidens höjd är *h* och sidokanten är 30 cm.

Baskvadratens sida är $5+2+5=12\ (\text{cm})$.

Diagonalen i en kvadrat är $\sqrt{2}$ gånger längden av sidan (Pythagoras sats), vilket ger att baskvadratens halva diagonal har längden

$$\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}\ (\text{cm}).$$



$\triangle ABC$:

$$h^2=30^2-\left(6\sqrt{2}\right)^2$$
$$h^2=900-72$$
$$h^2=828$$
$$h^2=36\cdot 23$$
$$h=_{(}\pm_{)}6\sqrt{23}$$

Pyramidens topp ligger på höjden

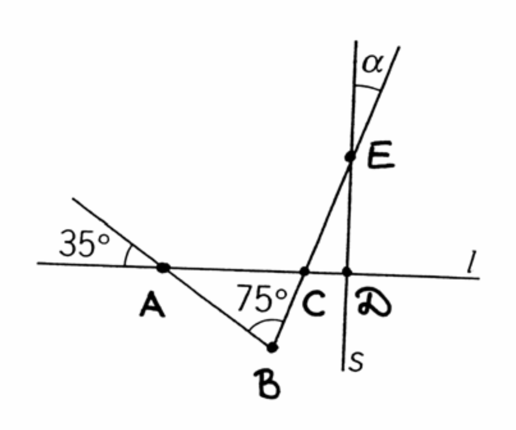
$$5+6\sqrt{23}=33{,}77...\approx 34\ (\text{cm})$$

Svar 34 cm

Prov 3

1

a)



I triangeln ABC är

$\sphericalangle BAC = 35^\circ$	vertikalvinklar
$\sphericalangle BCA = 180^\circ - 35^\circ - 75^\circ = 70^\circ$	vinkelsumman i en triangel

I triangeln CDE är

$\sphericalangle DCE = 70^\circ$	vertikalvinklar
$\sphericalangle CED = \alpha$	vertikalvinklar
$\sphericalangle CDE = 90^\circ$	$l \perp s$

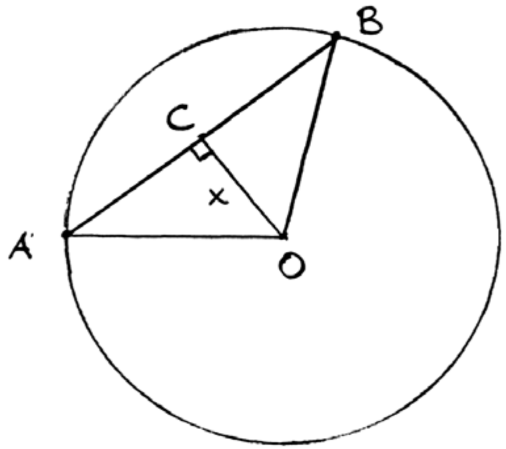
Vi får ekvationen

$70^\circ + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$	vinkelsumman i en triangel
$\alpha = 20^\circ$	

b) Vi ritar en figur.

$|OA| = |OB| = 150 \text{ m}$

$|\text{AB}| = 240 \text{ m}$



Triangeln AOB är likbent, vilket ger att höjden $OC = x$ halverar basen AB.
Alltså är $|AC| = 120 \text{ cm}$.

Triangeln AOC ger med Pyhtagoras sats ekvationen

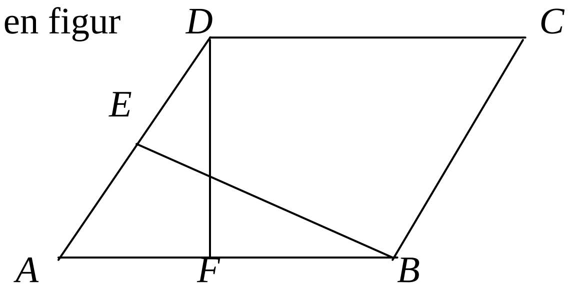
$$x^2 + 120^2 = 150^2$$
$$x^2 = 22500 - 14400$$
$$x^2 = 8100$$
$$x = _{(}\pm_{)}\sqrt{8100}$$
$$x = 90 \text{ (m)}$$

Alltså ligger stigen 90 meter från gräsmattans medelpunkt.

Svar a) $\alpha = 20^\circ$
b) 90 m

2

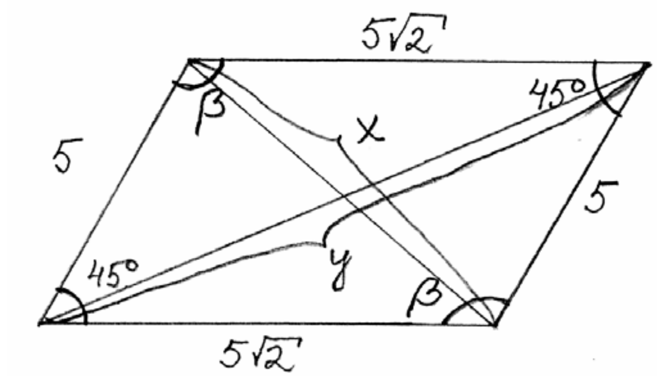
Vi ritar en figur



Trianglarna *AFD* och *AEB* är kongruenta enligt (vvs) eftersom

$\sphericalangle E = \sphericalangle F$ | höjden är vinkelrät mot basen
$AB = AD$ | sidorna i en romb är lika långa
$\sphericalangle A$ är gemensam

3



Anta att parallellogrammens diagonaler är *x* och *y*. Enligt cosinussatsen är

$$x^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 5\cdot 5\sqrt{2}\cos 45^\circ \qquad \left| \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right.$$

$$x^2 = 25 + 50 - 50\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 = 25 + 50 - 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = _{(}\pm_{)}5$$

Vinkelsumman i en parallellogram är 360°, vilket ger

$$2\cdot 45^\circ + 2\beta = 360^\circ$$

$$2\beta = 360^\circ - 90^\circ$$

$$2\beta = 270^\circ$$

$$\beta = 135^\circ$$

Enligt cosinussatsen är

$$y^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 5\cdot 5\sqrt{2}\cos 135^\circ \qquad \left| \begin{array}{l} \cos 135^\circ \\ = -\cos 45^\circ \\ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$y^2 = 25 + 25\cdot 2 - 50\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y^2 = 25 + 50 + 50$$

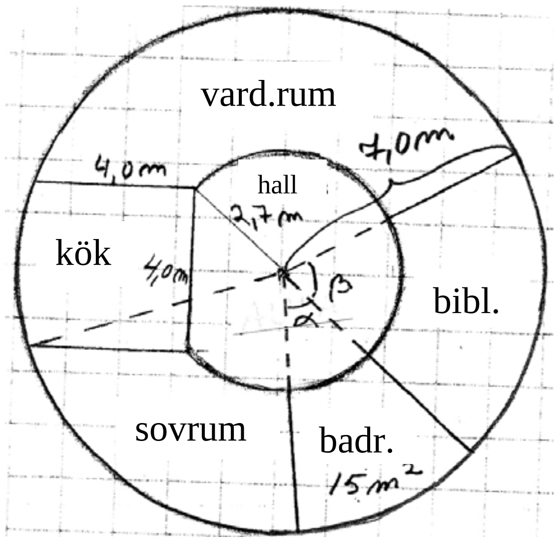
$$y^2 = 125$$

$$y = _{(}\pm_{)}\sqrt{25\cdot 5}$$

$$y = 5\sqrt{5}$$

Svar Diagonalernas längder är 5 och $5\sqrt{5}$

4



a) Anta att medelpunktsvinkeln som svarar mot badrummet är α, hallens radie r och husets radie R. Badrummets area är

$$\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi R^2 - \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi r^2 = 15$$

$$\frac{\alpha\pi}{360^\circ}\left(R^2 - r^2\right) = 15 \quad \left|\cdot\frac{360^\circ}{\pi\left(R^2 - r^2\right)}\right.$$

$$\alpha = \frac{15\cdot 360^\circ}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} \qquad \left| \begin{array}{l} R = 7{,}0 \\ r = 2{,}7 \end{array}\right.$$

$$\alpha = \frac{15\cdot 360^\circ}{\pi\left(7{,}0^2 - 2{,}7^2\right)}$$

$$\alpha = 41{,}21...^\circ \approx 41^\circ$$

b) Anta att bibliotekets motsvarande medelpunktsvinkel är β.
Bibliotekets area är

$$\frac{\beta}{360^\circ}\cdot\pi R^2-\frac{\beta}{360^\circ}\cdot\pi r^2=25$$

$$\frac{\beta}{360^\circ}\cdot\pi\left(R^2-r^2\right)=25 \qquad \left|\cdot\frac{360^\circ}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\right.$$

$$\beta=\frac{25\cdot360^\circ}{\pi\left(R^2-r^2\right)} \qquad \left|\begin{array}{l}R=7{,}0\\ r=2{,}7\end{array}\right.$$

$$\beta=\frac{25\cdot360^\circ}{\pi\left(7{,}0^2-2{,}7^2\right)}$$

$$\beta=68{,}68...^\circ$$

Bibliotekets böjda väggar har längden

$$\frac{\beta}{360^\circ}\cdot2\pi R \qquad \left|\beta=68{,}68...^\circ,\ R=7{,}0\right.$$

$$=\frac{68{,}68...^\circ}{360^\circ}\cdot2\pi\cdot7{,}0$$

$$=8{,}391...\approx8{,}4\ \text{(m)}$$

$$\frac{\beta}{360^\circ}\cdot2\pi r \qquad \left|\beta=68{,}68...^\circ,\ r=2{,}7\right.$$

$$=\frac{68{,}68...^\circ}{360^\circ}\cdot2\pi\cdot2{,}7$$

$$=3{,}236...\approx3{,}2\ \text{(m)}$$

c) Köket består av en kvadrat och ett litet segment. Anta att segmentets motsvarande medelpunktsvinkel är 2γ.

Den rätvinkliga triangeln OBC ger

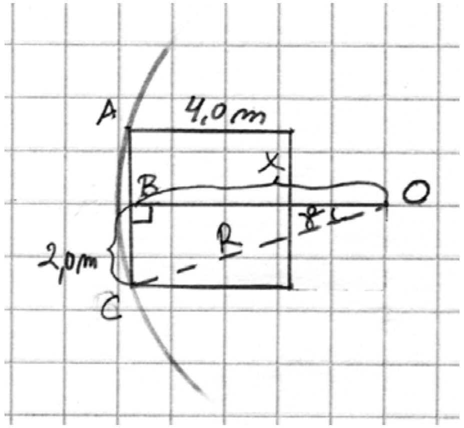
$$x^2+2^2=R^2 \qquad \left|R=7{,}0\right.$$

$$x^2=7{,}0^2-2^2$$

$$x^2=49-4$$

$$x=_{(}\pm_{)}\sqrt{45}$$

$$x=3\sqrt{5}$$



Vi bestämmer vinkeln γ ur den rätvinkliga triangeln OBC

$$\sin\gamma=\frac{2{,}0}{7{,}0}$$

$$\gamma=16{,}60...^\circ$$

Motsvarande medelpunktsvinkel till bågen AC är
$2\gamma=2\cdot16{,}60...^\circ=33{,}20...^\circ$.

Kökets segment = sektor – medelpunktstriangeln

$$= \frac{33,20...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{4,0 \cdot x}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} R = 7,0 \\ x = 3\sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$= \frac{33,20...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 7,0^2 - \frac{4,0 \cdot 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= 0,7814...$$

Kökets area $= \text{kvadrat} + \text{segment}$

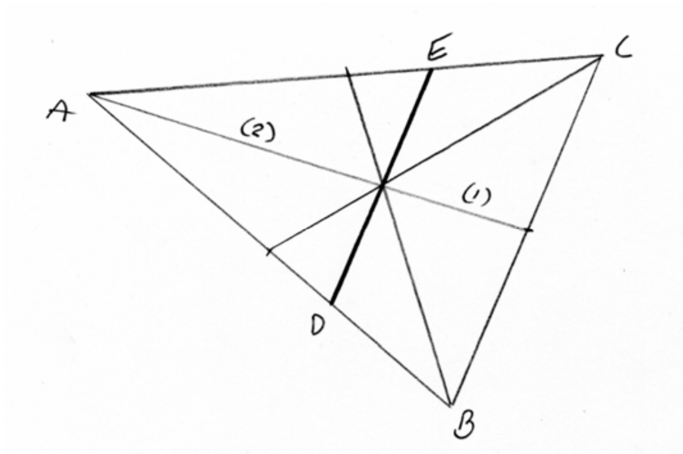
$$= 4,0^2 + 0,7814...$$

$$= 16,7814...$$

$$\approx 17 \ \left(\text{m}^2\right)$$

Svar a) Badrummets motsvarande medelpunktsvinkel är 41°.
b) Bibliotekets böjda väggar har längderna 3,2 m och 8,4 m.
c) Kökets area är 17 m^2.

5



Triangelns medianer delar varandra i förhållandet 2:1 från spetsarna räknat.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (vv), eftersom
$\sphericalangle A$ är gemensam
$\sphericalangle E = \sphericalangle C$ likbelägna vinklar , $DE \parallel BC$

Skalan är $k = \frac{h_{ADE}}{h_{ABC}} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

Areornas förhållande

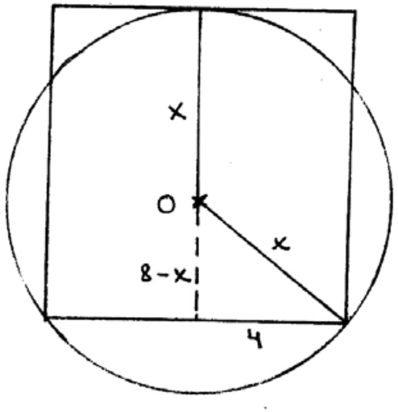
$$\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Svar Linjen delar arean i förhållandet 4:5.

6

Anta att cirkelns radie är *x*. Enligt Pythagoras sats är

$$(8-x)^2+4^2=x^2$$
$$64-16x+x^2+16=x^2$$
$$80-16x=0$$
$$16x=80$$
$$x=\frac{80}{16}=5$$



a)

$$p_{\text{cirkel}}=2\cdot\pi\cdot 5=10\pi$$
$$p_{\text{kvadrat}}=4\cdot 8=32$$
$$\frac{p_{\text{cirkel}}}{p_{\text{kvadrat}}}=\frac{10\pi}{32}=\frac{5\pi}{16}$$

b)

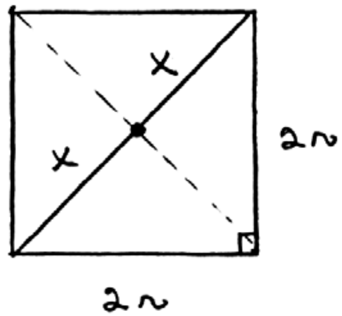
$$A_{\text{cirkel}}=\pi\cdot 5^2=25\pi$$
$$A_{\text{kvadrat}}=8\cdot 8=64$$
$$\frac{A_{\text{cirkel}}}{A_{\text{kvadrat}}}=\frac{25\pi}{64}$$

Svar a) Omkretsarnas förhållande är $\frac{5\pi}{16}$.

b) Areornas förhållande är $\frac{25\pi}{64}$.

7

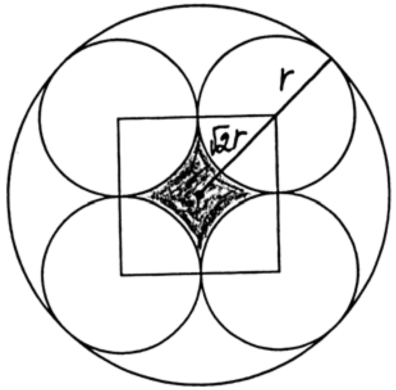
Vi ritar en figur.



$$A_{\text{kvadrat}}=(2r)^2=4r^2$$

Enligt Pythagoras sats är

$$(2r)^2+(2r)^2=(2x)^2$$
$$4r^2+4r^2=4x^2$$
$$x^2=2r^2$$
$$x=_{(\pm)}\sqrt{2r^2}=r\sqrt{2}$$



Arean av området mellan cirklarna är

$$A_{\text{mellanrum}}=A_{\text{kvadrat}}-4\cdot A_{\text{liten cirkels fjärdedel}}$$
$$A_{\text{mellanrum}}=4r^2-4\cdot\frac{1}{4}\pi r^2=(4-\pi)r^2$$

Den större cirkelns radie är $R=\sqrt{2}r+r=\left(\sqrt{2}+1\right)r$, vilket ger att dess area är

$$A_{\text{stor cirkel}}=\pi R^2=\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^2 r^2.$$

Areornas förhållande är

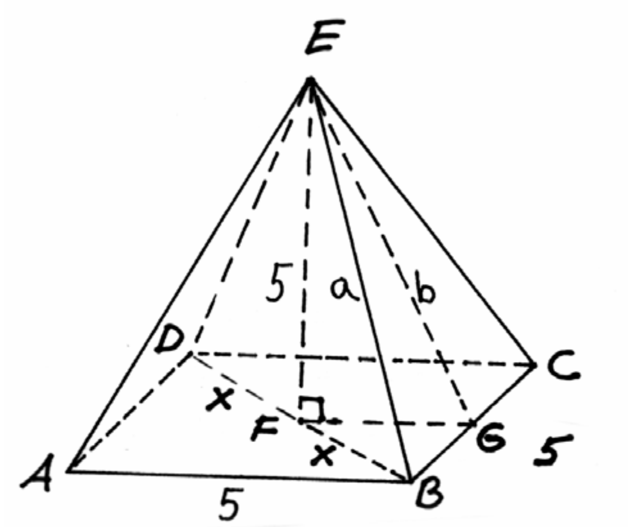
$$\frac{A_{\text{mellanrum}}}{A_{\text{stor cirkel}}}=\frac{(4-\pi)r^2}{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^2r^2}$$

$$=\frac{4-\pi}{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\frac{{}^{3-2\sqrt{2})}4-\pi}{\pi\left(2+2\sqrt{2}+1\right)}$$

$$=\frac{4-\pi}{\pi}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4-\pi}{\pi}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)\ (\approx 0{,}047)$$

Svar $\quad\dfrac{4-\pi}{\pi}\left(3-2\sqrt{2}\right)$

8

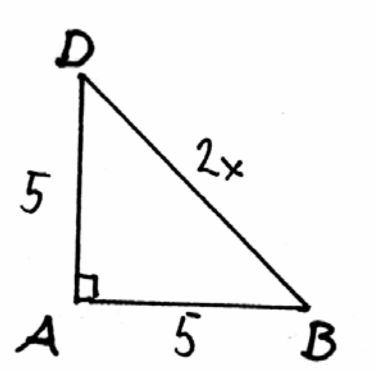


a)

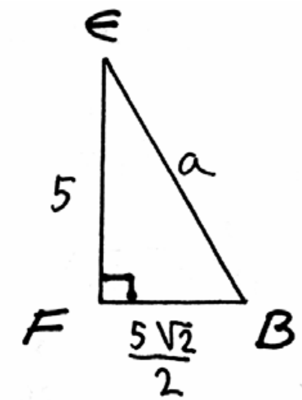
$$V=\frac{1}{3}\cdot A_p h=\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 5\cdot 5=\frac{125}{3}=41\frac{2}{3}$$

b) Bastriangeln *ABD* ger

$$(2x)^2 = 5^2 + 5^2$$
$$4x^2 = 50$$
$$x^2 = \frac{50}{4}$$
$$x = _{(}\pm_{)} \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

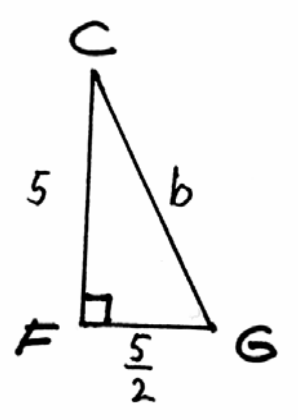


$$a^2 = 5^2 + x^2$$
$$a^2 = 25 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$a^2 = 25 + \frac{50}{4}$$
$$a^2 = \frac{75}{2}$$
$$a = _{(}\pm_{)} \sqrt{\frac{75}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$



c)

$$b^2 = 5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$b^2 = \frac{125}{4}$$
$$b = _{(}\pm_{)} \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$



$$A = A_{\text{basyta}} + 4A_{\text{sidoyta}} = 5 \cdot 5 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} = 25 + 25\sqrt{5}$$

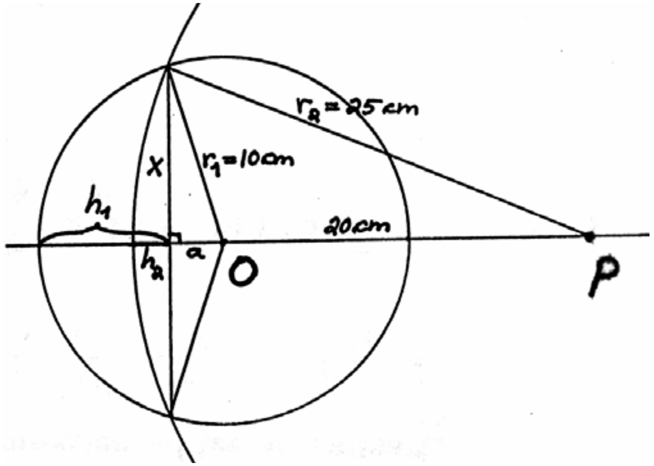
Svar

a) Volymen är $41\frac{2}{3}$.

b) Sidokantens längd är $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

c) Totala arean är $25 + 25\sqrt{5}$.

9



$$V = V_{\text{liten sfär}} - V_{\text{sfäriskt segm 1}} + V_{\text{sfäriskt segm 2}}$$
$$= \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \pi h_1^2\left(r_1 - \frac{h_1}{3}\right) + \pi h_2^2\left(r_2 - \frac{h_2}{3}\right)$$

Vi bestämmer h_1 och h_2.

$$h_1 + a = 10 \qquad h_2 + a + 20 = 25$$
$$h_1 = 10 - a \qquad h_2 = 5 - a$$

Eftersom $x^2 = 10^2 - a^2$ och $x^2 = 25^2 - (a+20)^2$, får vi

$$10^2 - a^2 = 25^2 - (a+20)^2$$
$$100 - a^2 = 625 - a^2 - 40a - 400$$
$$40a = 125$$
$$a = 3{,}125 \text{ (cm)}$$

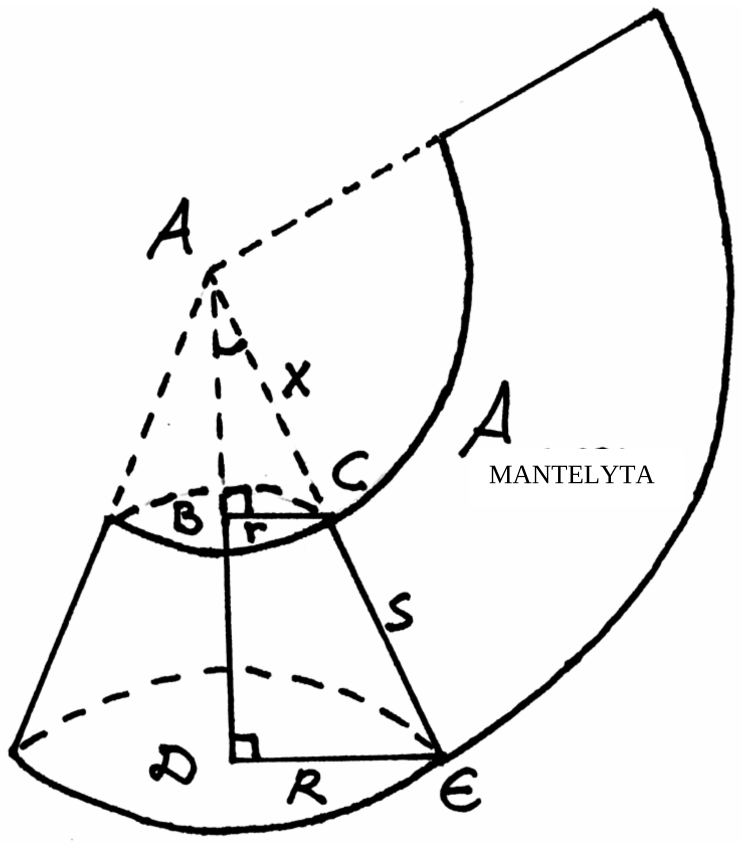
Då är $h_1 = 6{,}875$ cm och $h_2 = 1{,}875$ cm.

Alltså är $V = 3\,313{,}39\ldots\ \text{cm}^3 = 3{,}31339\ldots\ \text{dm}^3 \approx 3{,}3\ l$

Svar 3,3 liter

10

$r = 3{,}0\ \text{cm}$
$R = 15\ \text{cm}$
$s = 40\ \text{cm}$



$$A_{\text{mantelyta}} = \pi R(s+x) - \pi r x$$
$$= \pi R s + \pi R x - \pi r x$$
$$= \pi R s + \pi x(R-r)$$

Vi bestämmer x.

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{x+s} \qquad \Big|\ \triangle ABC \sim \triangle ADE\ \text{(vv)}$$
$$Rx = r(x+s)$$
$$Rx = rx + xs$$
$$(R-r)x = rs$$
$$x = \frac{rs}{R-r}$$

$$A_{\text{mantelyta}} = \pi R s + \pi \cdot \frac{rs}{R-r} \cdot (R-r)$$
$$= \pi R s + \pi r s$$
$$= \pi s(R+r)$$
$$= \pi \cdot 40(15+3{,}0)$$
$$= 2\ 261{,}94...\ (\text{cm}^2)$$

Alltså är

$$A_{\text{mantelyta}} = 2\ 261{,}94...\ \text{cm}^2$$
$$= 22{,}6194...\ \text{dm}^2$$
$$= 0{,}226194...\text{m}^2$$
$$\approx 0{,}23\ \text{m}^2$$

Svar $\quad 0{,}23\ \text{m}^2$