

**Prov 1****1****a)**

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (3x^2 - 8x + 1) dx \\
 &= \int_1^3 \left( 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 8 \cdot \frac{1}{2} x^2 + x \right) \\
 &= \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + x) \\
 &= 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 - 1(1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1) \\
 &= 27 - 36 + 3 - 1 + 4 - 1 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 (x^4 - x^2) dx &= \int_{-2}^2 \left( \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 \right) \\
 &= \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left( \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \right) \\
 &= \frac{32}{5} - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{3^3 64}{5} - \frac{5^3 16}{3} \\
 &= \frac{192}{15} - \frac{80}{15} = \frac{115}{15} \\
 &= 7 \frac{7}{15}
 \end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \frac{x}{2}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{s'(x)} dx \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \underbrace{-\cos \frac{x}{2}}_{U(s(x))} \\
 &= -2 \left( \cos \frac{2\pi}{2} - \cos \frac{0}{2} \right) \\
 &= -2((-1) - 1) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

**d)**

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\ln 3} e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int_1^{\ln 3} \underbrace{e^{3x}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{3}_{s'(x)} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^{\ln 3} e^{3x} \\
 &= \frac{1}{3} (e^{3 \ln 3} - e^{3 \cdot 1}) \\
 &= \frac{1}{3} (3^3 - e^3) \\
 &= 9 - \frac{e^3}{3} \approx 2,3
 \end{aligned}$$

**Svar**

$$\text{a) } -4 \quad \text{b) } 7 \frac{7}{15} \quad \text{c) } 4 \quad \text{d) } 9 - \frac{e^3}{3} \approx 2,3$$

**2**

$$\text{a)} \quad \int (-\sin x) dx = \cos x + C$$

$$\text{b)} \quad \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos 2x}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{2}_{s'(x)} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2x}_{U(s(x))} + C$$

**c)**

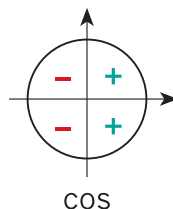
$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{s'(x)} dx$$

$$= - \underbrace{\ln |\cos x|}_{U(s(x))} + C$$

$$= -\ln(\cos x) + C$$

$$= -\ln \cos x + C$$

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ vilket} \\ \text{ger } \cos x > 0 \end{array} \right.$$

**Svar**

a)  $\cos x + C$

b)  $\frac{1}{2} \sin 2x + C$

c)  $-\ln \cos x + C$

**3**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (7 - 8x) dx \\ &= 7x - 8 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C \\ &= 7x - 4x^2 + C \end{aligned}$$

Vi får ekvationen

$$F(2) = -3$$

$$7 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + C = -3$$

$$C = -1$$

Dvs.  $F(x) = 7x - 4x^2 - 1$ .

**Svar**  $F(x) = 7x - 4x^2 - 1$

## 4

Skärningspunkterna mellan kurvorna  $y_1 = 3x$  och  $y_2 = x^2 + 2$ :

$$y_1 = y_2$$

$$3x = x^2 + 2$$

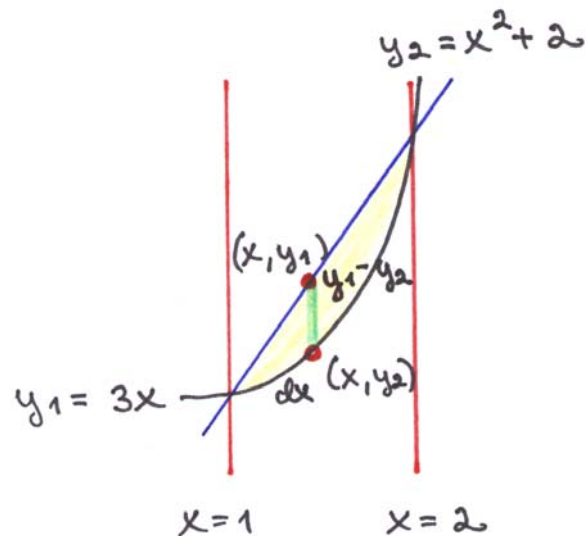
$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = 2 \text{ eller } x = 1$$

Vi ritar en figur.



Arean är

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 (y_1 - y_2) dx \quad | \quad y_1 \geq y_2, \text{ när } 1 \leq x \leq 2$$

$$= \int_1^2 [3x - (x^2 + 2)] dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \int_1^2 \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - \left( -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - 4 - \left( -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} - \frac{7}{3}$$

$$= \frac{15}{6} - \frac{14}{6} = \frac{1}{6}$$

**Svar**      Arean är  $\frac{1}{6}$ .

## 5

Skärningspunkterna mellan parabeln  $y = 6x - 3x^2$  och linjen  $y = 0$ :

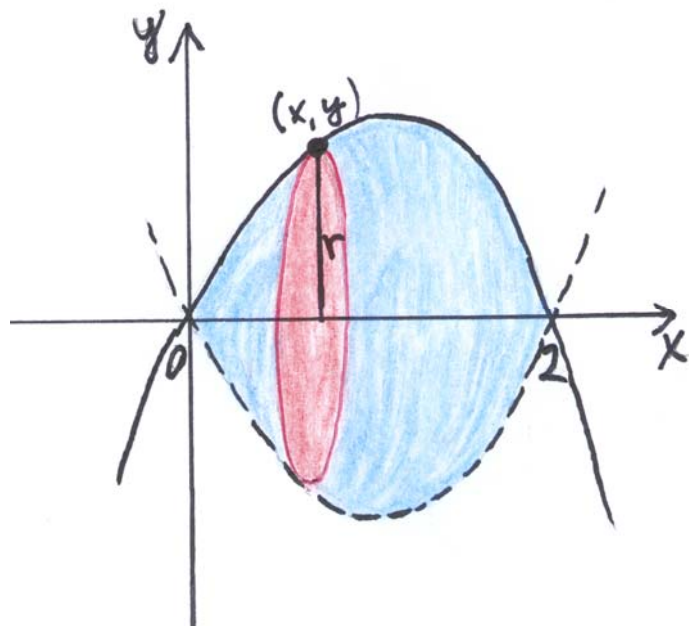
$$6x - 3x^2 = 0$$

$$3x(2 - x) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{eller} \quad 2 - x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2$$

Vi ritar en figur.



Rotationskroppens volym är

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi r^2 dx \quad \left| \begin{array}{l} r = y \\ r^2 = y^2 = (6x - 3x^2)^2 \end{array} \right.$$

$$= \pi \int_0^2 (6x - 3x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (36x^2 - 36x^3 + 9x^4) dx$$

$$= \pi / \left( \frac{36}{3} x^3 - \frac{36}{4} x^4 + \frac{9}{5} x^5 \right)$$

$$= \pi \left( 12 \cdot 8 - 9 \cdot 16 \cdot \frac{9}{5} \cdot 32 - 0 \right)$$

$$= \frac{48\pi}{5}$$

$$= 9 \frac{3}{5} \pi \approx 30,2$$

**Svar**  $9 \frac{3}{5} \pi \approx 30,2$

## 6

Eftersom funktionen  $f(x) = |3 - x|$  är kontinuerlig så har den en primitiv funktion.

Funktionen  $f$  kan inte integreras direkt, utan vi måste först skriva om den som en styckvis definierad funktion.

$$f(x) = |3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & \text{när } 3 - x \geq 0 \\ -(3 - x), & \text{när } 3 - x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x + 3, & \text{när } x \leq 3 \\ x - 3, & \text{när } x > 3 \end{cases}$$

De primitiva funktionerna till funktionen  $f$  kan skrivas på formen

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C, & x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + D, & x > 3 \end{cases}$$

Eftersom den primitiva funktionen  $F$  är kontinuerlig, får vi speciellt att den är kontinuerlig för  $x = 3$ . Detta ger att

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x).$$

Eftersom

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C \right) = 4\frac{1}{2} + C$

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{1}{2}x^2 - 3x + D \right) = -4\frac{1}{2} + D$

så får vi ekvationen

$$4\frac{1}{2} + C = -4\frac{1}{2} + D$$

$$D = 9 + C$$

De primitiva funktionerna till funktionen  $f$  är

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C, & x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 + C, & x > 3 \end{cases}$$

Eftersom  $F(1) = -1$  får vi ekvationen

$$-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + C = -1$$

$$C = -3\frac{1}{2}$$

Dvs.

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 3\frac{1}{2}, & x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\frac{1}{2}, & x > 3 \end{cases}$$

**Svar**

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 3\frac{1}{2}, & x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\frac{1}{2}, & x > 3 \end{cases}$$

7

- a) Skärningspunkterna mellan kurvorna  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$  och  $x = \sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$ , dvs. mellan kurvorna  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$  och  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$ :

$$x = \sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{x}} \quad | x \geq 0$$

$$x = \left[ (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x} \quad | n\text{:te rotens definition}$$

$$x = x^4$$

$$x - x^4 = 0$$

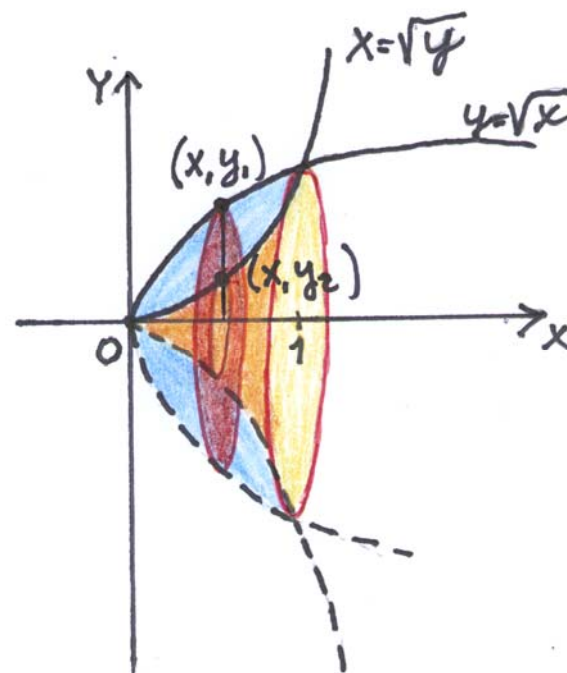
$$x(1 - x^3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad 1 - x^3 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

Vi ritar en figur.



Volymen av rotationskroppen får vi som differensen av två rotationskroppar.

$$V = \int_0^1 dV = \int_0^1 (\pi y_1^2 - \pi y_2^2) dx \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = \sqrt{x} \\ y_2 = x^2 \end{array} \right.$$

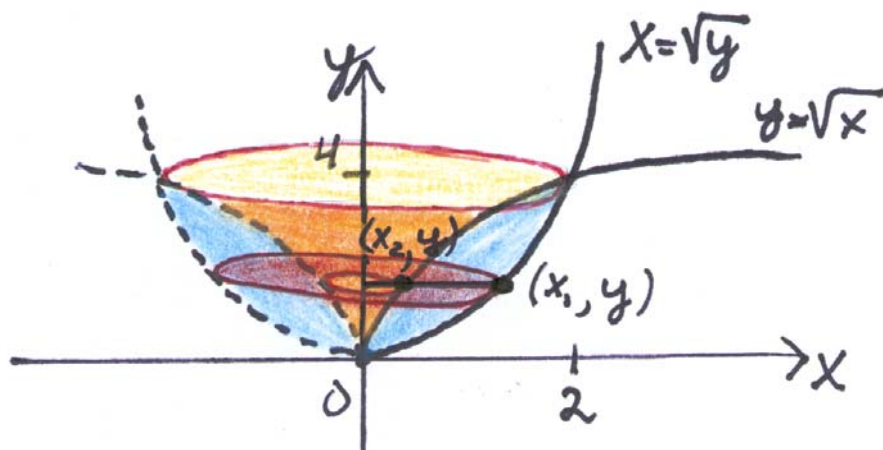
$$= \pi \int_0^1 [\sqrt{x}^2 - (x^2)^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right) dx \\
 &= \pi \left( \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 - 0 \right) \\
 &= \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{10} \quad (\approx 0,94)
 \end{aligned}$$

- b) Vi bestämmer  $y$ -koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvorna  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$  och  $x = \sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$ , dvs. mellan kurvorna  $x = y^2$ ,  $y \geq 0$  och  $x = \sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$ . Enligt a-fallet är dessa  $y$ -koordinater

$$y = \sqrt{0} = 0 \quad \text{och} \quad y = \sqrt{1} = 1$$



Rotationskroppens volym är differensen mellan två rotationskroppar.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 dV = \int_0^1 (\pi x_1^2 - \pi x_2^2) dy \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{y} \\ x_2 = y^2 \end{array} \right. \\
 &= \pi \int_0^1 [\sqrt{y}^2 - (y^2)^2] dy \\
 &= \pi \int_0^1 (y - y^4) dy \\
 &= \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5 \right) dy \\
 &= \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{10} \quad (\approx 0,94)
 \end{aligned}$$

- Svar
- a)  $\frac{3\pi}{10} \approx 0,94$
- b)  $\frac{3\pi}{10} \approx 0,94$

## 8

Vi bestämmer först hur grafen till funktionen  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$  ligger i förhållande till  $x$ -axeln.

Funktionen  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x}$  är strängt avtagande i intervallet  $e^3 \leq x \leq e^6$  eftersom

$$f'(x) = \frac{x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

När  $e^3 \leq x \leq e^6$ , så är  
 $x^2 > 0$ ,  $\ln x \geq \ln e^3 = 3 \ln e = 3 > 0$   
och  $2 - \ln x \leq 2 - 3 = -1 < 0$ .

$< 0$ , när  $e^3 \leq x \leq e^6$

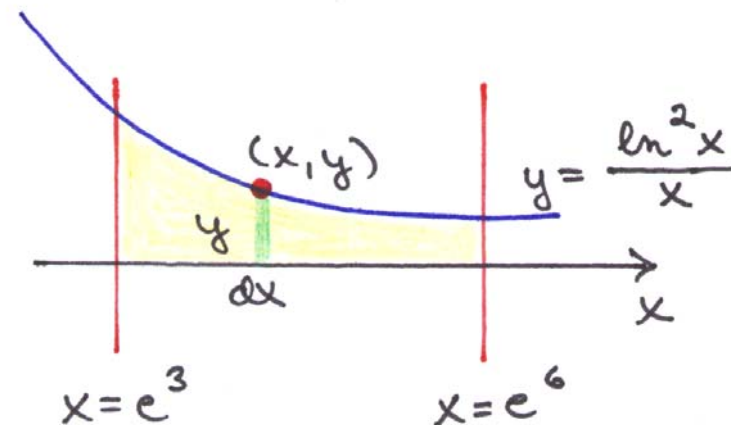
Dessutom är

$$\bullet \quad f(e^3) = \frac{(\ln e^3)^2}{e^3} = \frac{9}{e^3} > 0$$

$$\bullet \quad f(e^6) = \frac{(\ln e^6)^2}{e^6} = \frac{36}{e^6} > 0$$

vilket ger att grafen till funktionen  $f$  ligger ovanför  $x$ -axeln i intervallet  $[e^3, e^6]$ .

Vi ritar en figur.



Arean av ett ytelement är  $dA = y dx$ , vilket ger att arean är

$$A = \int_{e^3}^{e^6} dA = \int_{e^3}^{e^6} y dx = \int_{e^3}^{e^6} \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$= \int_{e^3}^{e^6} \underbrace{(\ln x)^2}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{s'(x)} dx$$

$$\left| \begin{array}{l} s(x) = \ln x \text{ och } u(x) = x^2 \\ s'(x) = \frac{1}{x} \text{ och } U(x) = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3} (\ln x)^3}_{U(s(x))} \Big|_{e^3}^{e^6}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3}(\ln e^6)^3 - \frac{1}{3}(\ln e^3)^3 && \left| \log_a a^x = x \right. \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 \\
 &= \frac{1}{3}(216 - 27) = \frac{189}{3} = 63
 \end{aligned}$$

**Svar** Arean är 63.

**9**

**a)** Kurvan  $y = -\sqrt{9-x^2}$  är den nedre halvcirkeln i en cirkel med medelpunkten i origo och radien 3, eftersom

$$\begin{aligned}
 y &= -\sqrt{9-x^2} \\
 y^2 &= 9-x^2 && \left| y \leq 0, -3 \leq x \leq 3 \right. \\
 x^2 + y^2 &= 3^2
 \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
 &\int_{-3}^3 -\sqrt{9-x^2} dx \\
 &= -\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx && \left| \begin{array}{l} \text{halvcirkelns area} \\ \text{är } A = \frac{\pi r^2}{2} \end{array} \right. \\
 &= -\frac{\pi \cdot 3^2}{2} \\
 &= -\frac{9\pi}{2}
 \end{aligned}$$

**b)** Funktionen  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{9x-x^3}$  är udda eftersom

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \sqrt[3]{9(-x) - (-x)^3} \\
 &= \sqrt[3]{-(9x-x^3)} \\
 &= -\sqrt[3]{(9x-x^3)} \\
 &= -f(x)
 \end{aligned}$$

Eftersom integrationsintervallet  $[-1, 1]$  är symmetrisk med avseende på origo, så är

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{(9x-x^3)} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

**Svar**

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & -\frac{9\pi}{2} \\
 \text{b)} & 0
 \end{aligned}$$

**10**

$$\int \underbrace{x}_{g'} \underbrace{e^{-3x}}_{f'} dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{ur tabellbok:} \\ \int f' g dx = fg - \int g' f dx \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{3}e^{-3x}}_f \cdot \underbrace{x}_g - \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)}_f dx$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3}e^{-3x} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

**Svar**  $-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$

## Prov 2

1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int (x^3 - 3x^2 + 5x - 6) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 6x + C \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{x} dx \\ &= \int \left( x^2 - 3x + 5 - \frac{6}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x - 6 \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 6 \ln|x| + C \quad | x > 0 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 6 \ln x + C \end{aligned}$$

2

$$\text{a)} \quad \int e^5 dx = e^5 x + C$$

$$\text{b)} \quad \int e^{5x} dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = 5x \text{ och } u(x) = e^x \\ s'(x) = 5 \text{ och } U(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{5} \int \underbrace{e^{5x}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{5}_{s'(x)} dx = \frac{1}{5} \underbrace{e^{5x}}_{U(s(x))} + C$$

c)

$$\int 5^{5x} dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = 5x \text{ och } u(x) = 5^x \\ s'(x) = 5 \text{ och } U(x) = \frac{5^x}{\ln 5} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{5} \int \underbrace{5^{5x}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{5}_{s'(x)} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{5^{5x}}{\underbrace{\ln 5}_{U(s(x))}} + C$$

$$= \frac{5^{5x}}{5 \ln 5} + C$$

Svaret kan också ges  
på denna form.

$$= \frac{5^{5x-1}}{\ln 5} + C$$

Svaret kan också ges  
på denna form.

3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int \frac{1}{3x} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x| + C \quad | x < 0 \\ &= \frac{1}{3} \ln(-x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int \frac{x+1}{x^2-1} dx &= \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = x-1 \text{ och } u(x) = \frac{1}{x} \\ s'(x) = 1 \quad \text{och } U(x) = \ln|x| \end{array} \right. \\ &= \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{1}_{s'(x)} dx \\ &= \underbrace{\ln|x-1|}_{U(s(x))} + C \quad | x > 1, \text{ vilket ger } x-1 > 0 \\ &= \ln(x-1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int \left( \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} \right) dx &= \int \left( \frac{2}{6x} - \frac{3}{6x} - \frac{6}{6x} \right) dx \\ &= \int \frac{-7}{6x} dx = -\frac{7}{6} \int \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{7}{6} \ln|x| + C \quad | x > 0 \\ &= -\frac{7}{6} \ln x + C \end{aligned}$$

**Alternativt lösningssätt:**

$$\begin{aligned} &\int \left( \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{3x} dx - \int \frac{1}{2x} dx - \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x| + C \quad | x > 0 \\ &= \frac{2 \ln x}{6} - \frac{3 \ln x}{6} - \frac{6 \ln x}{6} + C = \frac{2 \ln x - 3 \ln x - 6 \ln x}{6} + C \\ &= \frac{-7 \ln x}{6} + C = -\frac{7}{6} \ln x + C \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \sin(2x + \pi) dx && \left| \begin{array}{l} s(x) = 2x + \pi \text{ och } u(x) = \sin x \\ s'(x) = 2 \quad \text{och } U(x) = -\cos x \end{array} \right. \\
 &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin(2x + \pi)}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{2}_{s'(x)} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{[-\cos x(2x + \pi)]}_{U(s(x))} dx + C \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(2x + \pi) + C
 \end{aligned}$$

Eftersom  $F(\pi) = \frac{1}{2}$  får vi ekvationen

$$-\frac{1}{2} \cos(2\pi + \pi) + C = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \cos 3\pi + C = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1) + C = \frac{1}{2}$$

$$C = 0$$

Dvs.  $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x + \pi)$ .

Svaret kan också ges på en annan form:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= -\frac{1}{2} \cos(2x + \pi) && \left| \begin{array}{l} \text{cosinus för} \\ \text{supplementvinkeln:} \\ \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot [-\cos(\pi - (2x + \pi))] ]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cos(-2x) && \left| \begin{array}{l} \text{cosinus för den motsatta vinkeln:} \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x$$

**Svar**  $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x + \pi) \quad \left( F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \right)$

## 5

Vi bestämmer tangentens ekvation för funktionen

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 3 \quad \text{i } x=0:$$

Derivatan är

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Tangentens riktningskoefficient i  $x=0$  är  $k_t = f'(0) = 1$ .

Eftersom  $f(0) = 3$  så går tangenten genom punkten  $(0,3)$ .

Tangentens ekvation är

$$y - 3 = 1(x - 0) \quad \left| \quad y - y_0 = k(x - x_0) \right.$$

$$y = x + 3$$

Skärningspunkterna för kurvorna

$$y_1 = x^3 - x^2 + x + 3 \quad \text{och} \quad y_2 = x + 3:$$

$$y_1 = y_2$$

$$x^3 - x^2 + x + 3 = x + 3$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

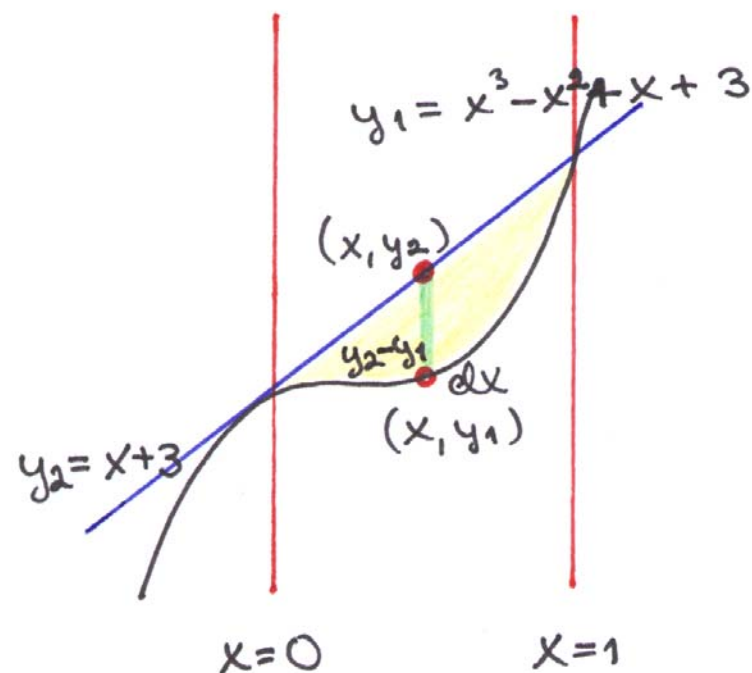
$$x^2(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 1$$

De funktioner som svarar mot kurvorna  $y_1 = x^3 - x^2 + x + 3$  och  $y_2 = x + 3$  är kontinuerliga, vilket ger att kurvorna kan byta ordning endast i skärningspunkterna. Vi bestämmer kurvornas ordning i intervallet  $0 \leq x \leq 1$  med hjälp av några testpunkter.

$x$	$y_1 = x^3 - x^2 + x + 3$	$y_2 = x + 3$	kommentar
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$3\frac{1}{2}$	$y_1 \leq y_2$ , när $0 \leq x \leq 1$

Vi ritar en figur.



Arean är

$$A = \int_0^1 dA = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx \quad | \quad y_2 \geq y_1, \text{ när } 0 \leq x \leq 1$$

$$= \int_0^1 \left[ x + 3 - (x^3 - x^2 + x + 3) \right] dx$$

$$= \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx$$

$$= \int_0^1 \left( -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left( -\frac{1}{4} \cdot 0^4 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

**Svar**      Arean är  $\frac{1}{12}$ .

**6**

Skärningspunkterna mellan kurvorna

$$y_1 = x^2 \quad \text{och} \quad y_2 = x^2 - 4x + 4:$$

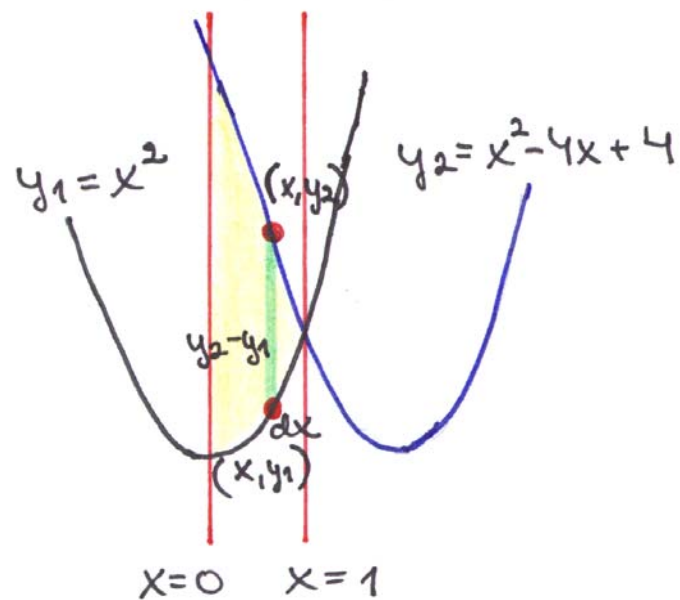
$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$-4x + 4 = 0$$

$$x = 1$$

Vi ritar en figur.



Arean är

$$A = \int_0^1 dA = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx \quad | \quad y_2 \geq y_1, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 4 - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (-4x + 4) dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^2 + 4x)$$

$$= -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - (-2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0)$$

$$= -2 + 4 = 2$$

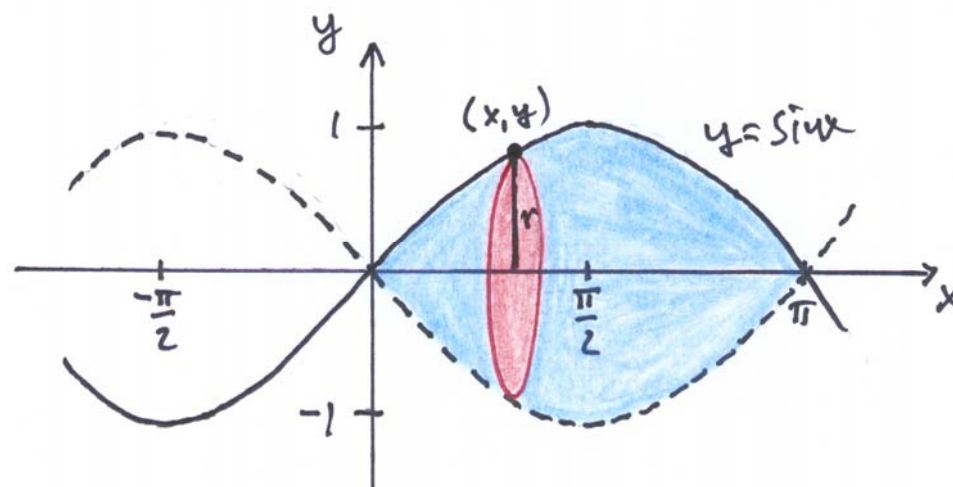
**Svar**      Arean är 2.

7

En pärla i pärlbandet uppstår när kurvan

$$y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

roterar kring  $x$ -axeln.



Volymen av en pärla är

$$V = \int_0^{\pi} \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \pi (\sin x)^2 dx$$

ur tabellbok:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\
&= \pi \left( \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos 2x dx \right) \\
&= \pi \left( \left[ \frac{1}{2} x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 2 \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \pi \left( \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4} \cdot \left[ \sin 2x \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \pi \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot (\sin 2\pi - \sin 0) \right] = \pi \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

**Svar** Pärlans volym är  $\frac{\pi^2}{2}$ .

**8**

**a)**

$$\int_0^2 x(1-x^2)^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{(1-x^2)^2}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{(-2x)}_{s'(x)} dx \quad \left| \begin{array}{ll} u(x) = x^2 & s(x) = 1-x^2 \\ U(x) = \frac{1}{3}x^3 & s'(x) = -2x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (1-x^2)^3 \\
&= -\frac{1}{6} \left( (1-2^2)^3 - (1-0)^3 \right) \\
&= -\frac{1}{6} \left( (-3)^3 - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{6} (-27 - 1) \\
&= 4\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx \\
&= \int_1^2 \underbrace{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{2x}_{s'(x)} dx \\
&= \left[ \frac{2}{3} (x^2-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3} (2^2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (1^2-1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \\
&= 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

**Svar** a)  $4\frac{2}{3}$  b)  $2\sqrt{3}$

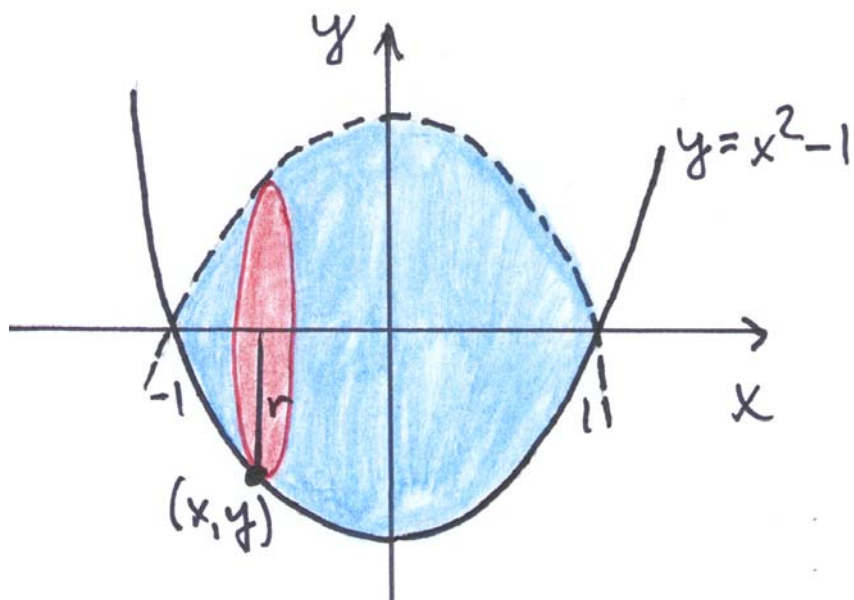
9

a) Vi bestämmer nollställena för funktionen  $f(x) = x^2 - 1$ :

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

Vi ritar en figur.



Volymen är

$$V = \int_{-1}^1 dV \quad | \quad f(x) \text{ är en jämn funktion.}$$

$$= 2 \int_0^1 dV$$

$$= 2 \int_0^1 \pi y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

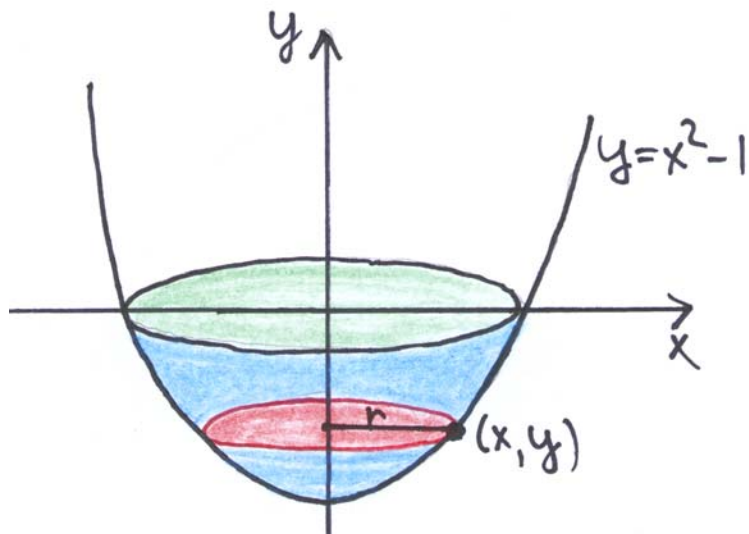
$$= 2\pi \left/ \left( \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right) \right.$$

$$= 2\pi \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 - 0 \right)$$

$$= \frac{16}{15} \pi \quad (\approx 3,35)$$

**Svar**  $\frac{16}{15} \pi \quad (\approx 3,35)$

- b) Nollställena för funktionen  $f$  är  $x = \pm 1$ . Toppens  $y$ -koordinat i parabeln är  $f(0) = 0^2 - 1 = -1$ .  
Vi ritat en figur.

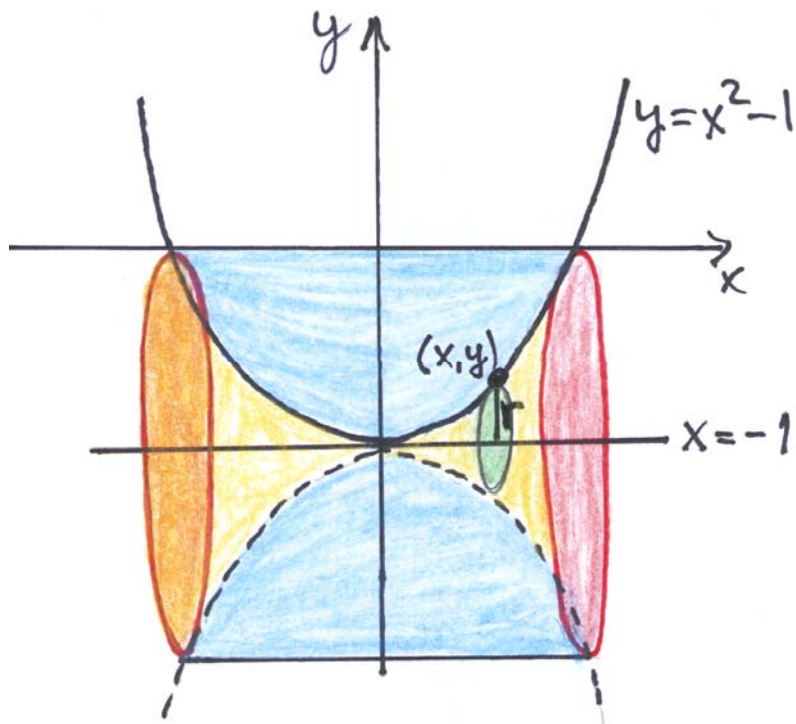


Volymen är

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^0 dV = \int_{-1}^0 \pi x^2 dy & \left| \begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ x^2 = y + 1 \end{array} \right. \\
 &= \pi \int_{-1}^0 (y + 1) dy \\
 &= \pi \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{2} y^2 + y \right) dy \\
 &= \pi \left[ 0 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \quad (\approx 1,57)
 \end{aligned}$$

- c) Området roterar kring linjen  $y = -1$ , som går genom parabelns topp.

Vi får volymen för den kropp som uppstår genom att från en rak cirkulär cylinder (basradien 1, höjden 2) subtrahera volymen av det ihåliga innandömet (se figur).



Volymen av det ihåliga innandömet är

$$V_1 = \int_{-1}^1 dV \quad | \text{symmetri}$$

$$= 2 \int_0^1 dV$$

$$= 2 \int_0^1 \pi r^2 dx \quad \left| \begin{array}{l} r = y - (-1) \\ = x^2 - 1 + 1 = x^2 \end{array} \right.$$

$$= 2 \int_0^1 \pi (x^2)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^4 dx$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left( \frac{1}{5} \cdot 1^5 - 0 \right)$$

$$= \frac{2\pi}{5}$$

Rotationskroppens volym är

$$V = V_{\text{cylinder}} - V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - V_1 = 2\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{5}\pi \quad (\approx 5,03)$$

**Svar**    a)  $\frac{16}{15}\pi \approx 3,35$     b)  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$     c)  $\frac{8}{5}\pi \approx 5,03$

**10**

Vi betecknar  $f(t) = \frac{3t+4}{5t-2}$ . Funktionen  $f$  är kontinuerlig när

$t > \frac{2}{5}$ , vilket gör att den har en primitiv funktion som vi

betecknar  $F(t) = \int \frac{3t+4}{5t-2} dt, t > \frac{2}{5}$ .

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_1^{1+x^2} f(t) dt = F(1+x^2) - F(1),$$

och då är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_1^{1+x^2} f(t) dt &= \frac{d}{dx} (F(1+x^2) - F(1)) \\ &= \frac{d}{dx} F(1+x^2) - \underbrace{\frac{d}{dx} F(1)}_{=0} \\ &= F'(1+x^2) \cdot \frac{d}{dx} (1+x^2) \quad | \quad F'(t) = f(t) \\ &= f(1+x^2) \cdot 2x \quad | \quad f(t) = \frac{3t+4}{5t-2} \\ &= \frac{3(1+x^2)+4}{5(1+x^2)-2} \cdot 2x \\ &= \frac{3x^2+7}{5x^2+3} \cdot 2x \\ &= \frac{6x^3+14x}{5x^2+3} \end{aligned}$$

**Svar**  $\frac{6x^3+14x}{5x^2+3}$

**Prov 3****1****a)**

$$\int (2x+3)^4 dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = 2x+3 \text{ och } u(x) = x^4 \\ s'(x) = 2 \quad \text{och } U(x) = \frac{1}{5}x^5 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{(2x+3)^4}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{2}_{s'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \underbrace{(2x+3)^5}_{U(s(x))} + C$$

$$= \frac{1}{10} (2x+3)^5 + C$$

**b)**

$$\int \sqrt{6-2x} dx$$

$$= \int (6-2x)^{\frac{1}{2}} dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = 6-2x \text{ och } u(x) = x^{\frac{1}{2}} \\ s'(x) = -2 \quad \text{och } U(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \int \underbrace{(6-2x)^{\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{(-2)}_{s'(x)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \underbrace{(6-2x)^{\frac{3}{2}}}_{U(s(x))} + C$$

$$= -\frac{1}{3} (6-2x)^1 \cdot (6-2x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3} (6-2x) \sqrt{6-2x} + C$$

$$\text{Svar} \quad \text{a)} \quad \frac{1}{10} (2x+3)^5 + C$$

$$\text{b)} \quad -\frac{1}{3} (6-2x) \sqrt{6-2x} + C$$

## 2

Funktionen  $F(x) = 12\sin\frac{x}{4} + 10\cos\frac{x}{5} + 8$  är en primitiv funktion till funktionen  $f(x) = 3\cos\frac{x}{4} - 2\sin\frac{x}{5}$  om  $F'(x) = f(x)$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

**Påstående:**  $F'(x) = f(x)$  för alla  $x \in \mathbb{R}$

**Bevis:**

$$\begin{aligned} F'(x) &= D\left(12\sin\frac{x}{4} + 10\cos\frac{x}{5} + 8\right) \\ &= 12D\sin\frac{x}{4} + 10D\cos\frac{x}{5} + 0 \\ &= 12 \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\sin\frac{x}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} \\ &= 3\cos\frac{x}{4} - 2\sin\frac{x}{5} \\ &= f(x) \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

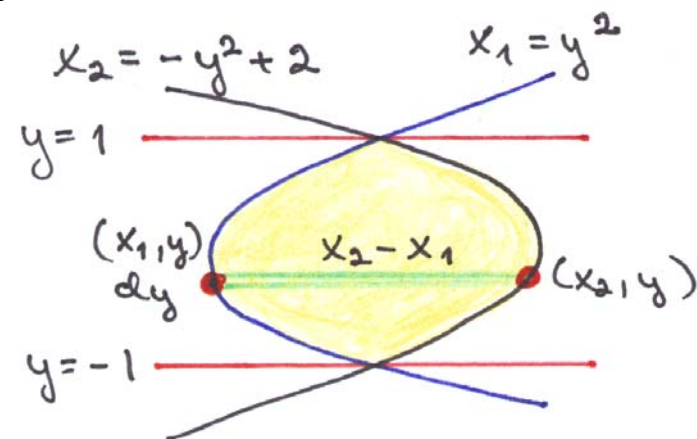
## 3

Parabeln  $x = y^2$  öppnar sig till höger och parabeln  $x = -y^2 + 2$  öppnar sig till vänster.

Vi bestämmer  $y$ -koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvorna  $x_1 = y^2$  och  $x_2 = -y^2 + 2$ .

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x = y^2 \end{cases} & \text{Insättning i ekvation (2).} \\ (2) \quad & \begin{cases} x = -y^2 + 2 \end{cases} \\ & y^2 = -y^2 + 2 \\ & 2y^2 = 2 \\ & y = \pm 1 \end{aligned}$$

Vi ritar en figur.



Ytelementets area är  $dA = (x_2 - x_1) dy$ , vilket ger att arean är

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 dA \\
 &= \int_{-1}^1 (x_2 - x_1) dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left( (-y^2 + 2) - y^2 \right) dy \\
 &= \int_{-1}^1 (-2y^2 + 2) dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left( -\frac{2}{3}y^3 + 2y \right) \\
 &= -\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - \left[ -\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) \right] \\
 &= -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

**Svar** Arean är  $2\frac{2}{3}$ .

**Anmärkning** Man skulle också ha kunnat beräkna arean genom att först spegla kurvorna med avseende på linjen  $y = x$ , eftersom arean som begränsas av kurvorna bevaras vid spegling. Då är ytelementet  $dA = (y_2 - y_1) dx$  och kurvorna är  $y_1 = x^2$  och  $y_2 = -x^2 + 2$ .

**4**

**a)**

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{x^3 + 1}_{u(s(x))}} \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\underbrace{x^3 + 1}_{u(s(x))}} \cdot \underbrace{3x^2}_{s'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) + C$$

$$\left| \begin{array}{l} s(x) = x^3 + 1 \text{ och } u(x) = \frac{1}{x} \\ s'(x) = 3x^2 \text{ och } U(x) = \ln|x| \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x > -1, \text{ vilket ger} \\ x^3 + 1 > 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\int \frac{x^2}{x+2} dx = \int \frac{x^2 - 4 + 4}{x+2} dx = \int \left( \frac{x^2 - 4}{x+2} + \frac{4}{x+2} \right) dx$$

$$= \int \left( \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} + \frac{4}{x+2} \right) dx$$

$$= \int \left( x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \int \frac{1}{\underbrace{x+2}_{u(s(x))}} dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = x+2 \text{ och } u(x) = \frac{1}{x} \\ s'(x) = 1 \text{ och } U(x) = \ln|x| \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \int \frac{1}{\underbrace{x+2}_{u(s(x))}} \cdot \underbrace{1}_{s'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \ln|x+2| + C \quad | x > -2, \text{ vilket ger } x+2 > 0$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \ln(x+2) + C$$

c)

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x} dx = \int \frac{x^2}{x(x+2)} dx = \int \frac{x}{x+2} dx$$

$$= \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int \left( \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \int \left( 1 - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{\underbrace{x+2}_{u(s(x))}} \cdot \underbrace{1}_{s'(x)} dx \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = x+2 \text{ och } u(x) = \frac{1}{x} \\ s'(x) = 1 \text{ och } U(x) = \ln|x| \end{array} \right.$$

$$= x - 2 \ln|x+2| + C \quad | x < -2, \text{ vilket ger } x+2 < 0$$

$$= x - 2 \ln(-x-2) + C$$

**Svar** a)  $\frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) + C$

b)  $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \ln(x+2) + C$

c)  $x - 2 \ln(-x-2) + C$

## 5

Vi ger kurvan  $y = |x^2 - 4|$  i styckvis definierad form:

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{när } x^2 - 4 > 0 \\ -x^2 + 4, & \text{när } x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4, & \text{när } x^2 > 4 \\ -x^2 + 4, & \text{när } x^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4, & \text{när } x < -2 \text{ eller } x > 2 \\ -x^2 + 4, & \text{när } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

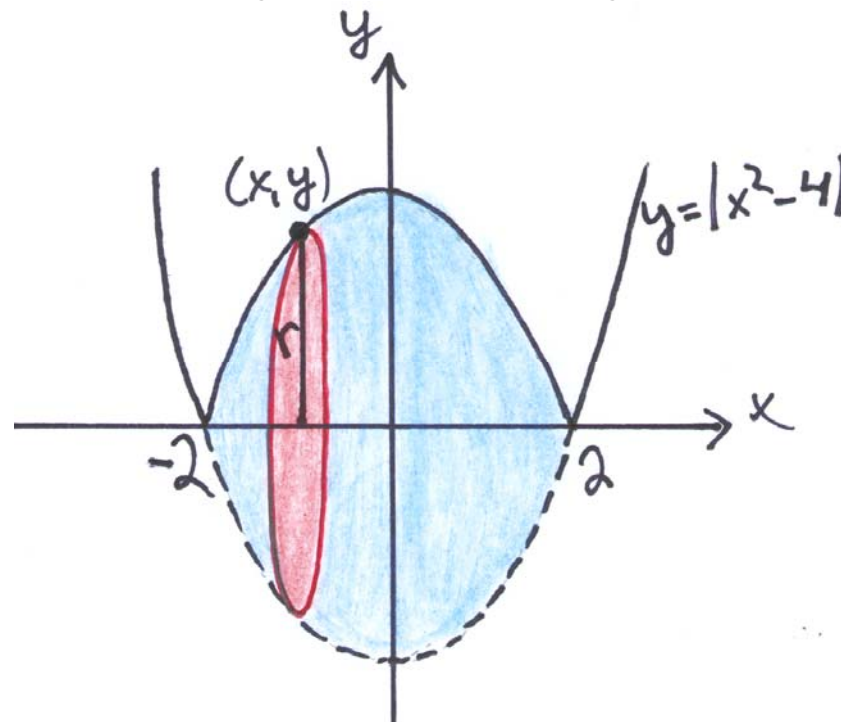
Nollställen:

$$y = 0$$

$$|x^2 - 4| = 0$$

$$x = \pm 2$$

a) Rotation kring  $x$ -axeln. Vi ritar en figur.



Volymen är

$$V = \int_{-2}^2 \pi r^2 dx \quad | \text{symmetri}$$

$$= 2 \int_0^2 \pi y^2 dx \quad | y = |x^2 - 4|$$

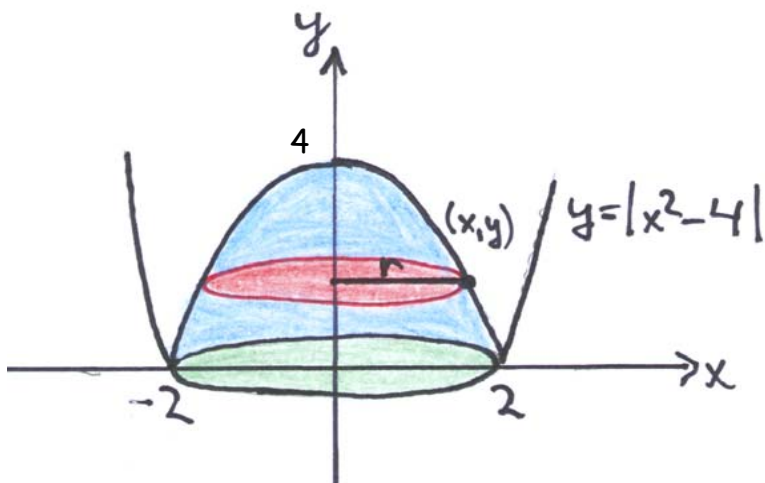
$$= 2\pi \int_0^2 |x^2 - 4|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx \\
 &= 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \\
 &= 2\pi \left/ \left( \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right) \right. \\
 &= 2\pi \left( \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + 16 \cdot 2 - 0 \right) \\
 &= \frac{512}{15} \pi \quad (\approx 107)
 \end{aligned}$$

b) Rotation kring  $y$ -axeln. Integrationsgränserna är

$$y = 0 \quad \text{och} \quad y = y(0) = |0^2 - 4| = |-4| = 4$$

Vi ritar en figur.



Volymen är

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 dV \\
 &= \int_0^4 \pi x^2 dy \quad \left| \begin{array}{l} y = |x^2 - 4|, -2 \leq x \leq 2 \\ y = -x^2 + 4 \\ x^2 = 4 - y \end{array} \right. \\
 &= \pi \int_0^4 (4 - y) dy \\
 &= \pi \left/ \left( 4y - \frac{1}{2}y^2 \right) \right. \\
 &= \pi \left( 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 0 \right) \\
 &= 8\pi \quad (\approx 25,1)
 \end{aligned}$$

Svar

a)	$\frac{512}{15} \pi \quad (\approx 107)$
b)	$8\pi \quad (\approx 25,1)$

## 6

Parabeln  $y = a^3 x^2 - a$  öppnar sig uppåt, eftersom  $a^3 > 0$ . Grafen till parabeln ligger under  $x$ -axeln mellan nollställena. Parabelns nollställena:

$$a^3 x^2 - a = 0$$

$$a^3 x^2 = a \quad | :a^3 (> 0)$$

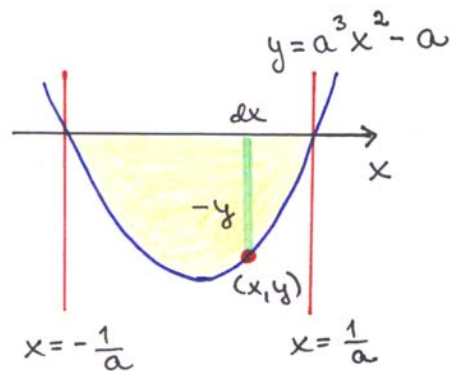
$$x^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{a^2}} \quad | \sqrt{a^2} = |a|$$

$$x = \pm \frac{1}{|a|} \quad | a > 0$$

$$x = \pm \frac{1}{a}$$

Vi ritat en figur.



Ytelementets area är  $dA = -y dx$ , vilket ger att arean är

$$A = \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} dA = \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} (-y) dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} (-a^3 x^2 + a) dx = \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \left( -\frac{a^3}{3} x^3 + ax \right)$$

$$= -\frac{a^3}{3} \cdot \left( \frac{1}{a} \right)^3 + a \cdot \frac{1}{a} - \left[ -\frac{a^3}{3} \left( -\frac{1}{a} \right)^3 + a \cdot \left( -\frac{1}{a} \right) \right]$$

$$= -\frac{a^3}{3} \cdot \frac{1}{a^3} + 1 - \left[ -\frac{a^3}{3} \cdot \left( -\frac{1}{a^3} \right) - 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

**Svar** Arean är  $1\frac{1}{3}$ .

**Anmärkning** I uppgiften skulle vi också ha kunnat utnyttja att funktionen är jämn och att integrationsintervallet är symmetriskt med avseende på origo.

$$A = \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} (-a^3 x^2 + a) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{a}} (-a^3 x^2 + a) dx = \dots = 1\frac{1}{3}.$$

7

Insulinet avges med hastigheten  $v(t) = 0,52e^{-0,89t} \text{ cm}^3/\text{dygn}$ .

Mängden avgivet insulin under de 30 första dagarna är då

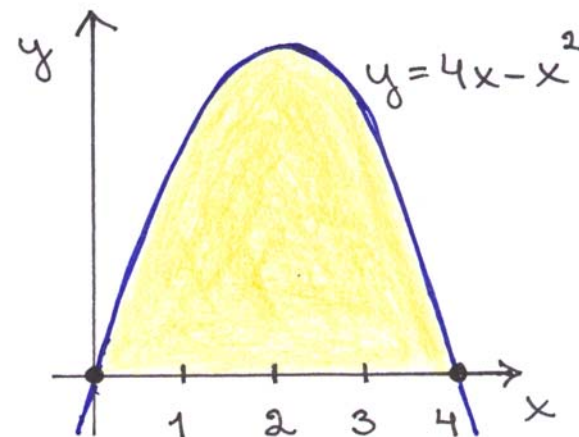
$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int_0^{30} v(t) dt \\
 &= \int_0^{30} 0,52e^{-0,89t} dt \\
 &= -\frac{0,52}{0,89} \int_0^{30} \underbrace{e^{-0,89t}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{(-0,89)}_{s'(x)} dt \\
 &= -\frac{0,52}{0,89} \left[ \underbrace{e^{-0,89t}}_{U(s(x))} \right]_0^{30} \\
 &= -\frac{0,52}{0,89} (e^{-0,89 \cdot 30} - e^{-0,89 \cdot 0}) \\
 &= \frac{0,52}{0,89} (e^{-26,7} - 1) \\
 &\approx 0,58 \text{ (cm}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

**Svar:**  $0,58 \text{ cm}^3$

8

Vi delar in intervallet  $[0,4]$  i fyra lika långa delintervall. Varje delintervall har då längden 1.

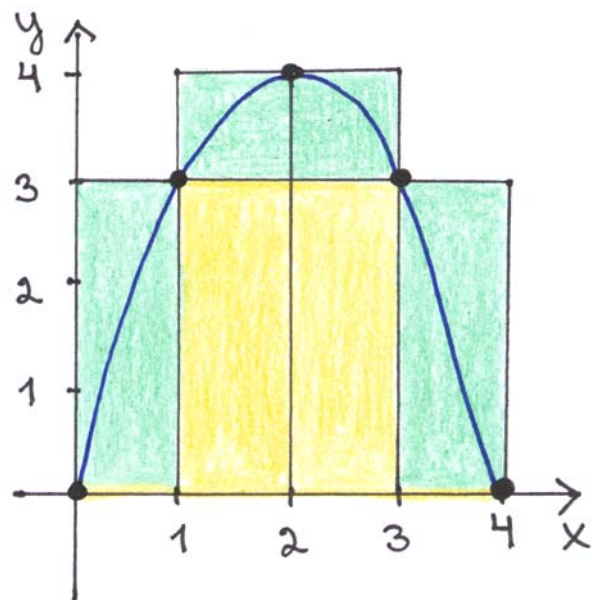
Vi ritar en figur.



Funktionen  $f$  är strängt växande i intervallet  $[0,2]$ , vilket ger att den i varje delintervall antar sitt största värde i intervallets högra ändpunkt och sitt minsta värde i intervallets vänstra ändpunkt.

Funktionen är strängt avtagande i intervallet  $[2,4]$ , vilket ger att den i varje delintervall antar sitt största värde i intervallets vänstra ändpunkt och sitt minsta värde i intervallets högra ändpunkt.

Vi uppskattar arean med under- och översummorna  $s_4$  och  $S_4$ .



Undersumman är

$$s_4 = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1$$

$$= 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 6$$

och översumman är

$$S_4 = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1$$

$$= 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 14$$

vilket ger att  $6 < A < 14$

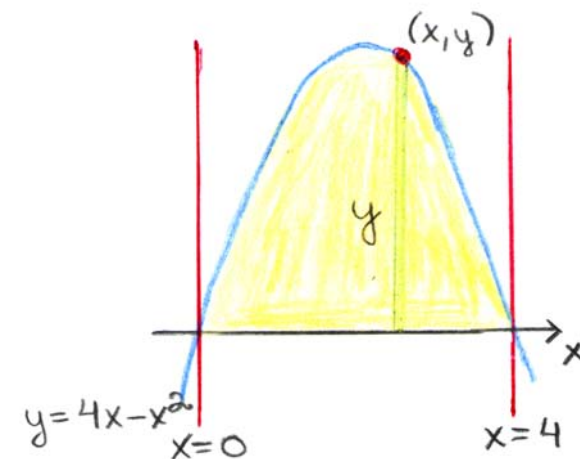
Ytelementets area är  $dA = y dx$ , vilket ger att areans exakta värde är

$$A = \int_0^4 dA = \int_0^4 y dx$$

$$= \int_0^4 (4x - x^2) dx$$

$$= \left/ \left( 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \right.$$

$$= 2 \cdot 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 0 = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$



Vi bestämmer vilketdera värdet som är noggrannare.

$$|A - s_4| = \left| 10\frac{2}{3} - 6 \right| = 4\frac{2}{3} \text{ och}$$

$$|A - S_4| = \left| 10\frac{2}{3} - 14 \right| = 3\frac{1}{3}$$

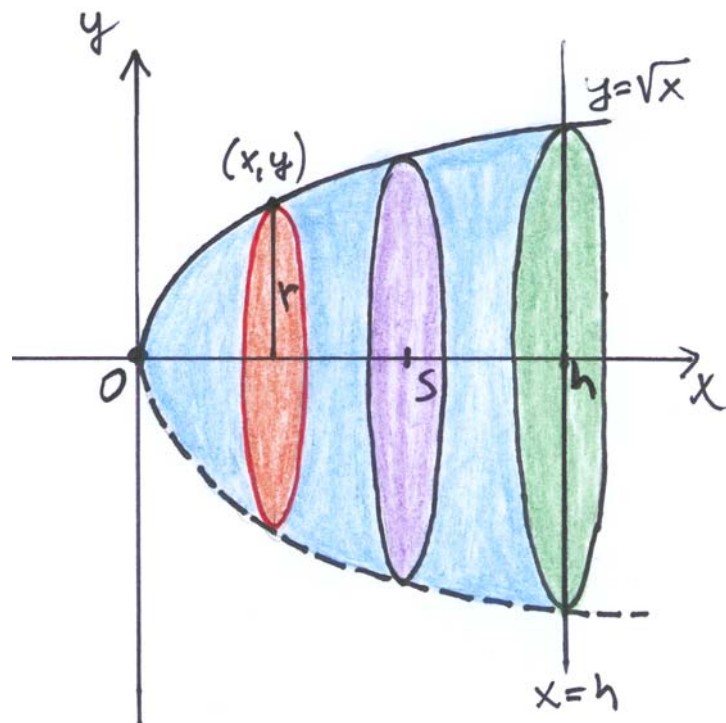
vilket ger att översumman är noggrannare.

**Svar**  $s_4 = 6$  och  $S_4 = 14$ .

Översumman är noggrannare eftersom arean är  $10\frac{2}{3}$ .

## 9

Vi ritar en figur.



Paraboloidens volym är

$$V = \int_0^h dV$$

$$= \int_0^h \pi y^2 dx \quad | \quad y = \sqrt{x}$$

$$= \pi \int_0^h (\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^h x dx$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^h$$

$$= \pi \left( \frac{1}{2} h^2 - 0 \right)$$

$$= \frac{h^2}{2} \pi$$

Skärningsstället är  $x = s$ :

$$V = \int_0^s dV = \frac{s^2}{2} \pi$$

Vi får ekvationen

$$\frac{s^2}{2}\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{2}\pi$$

$$s^2 = \frac{1}{2}h^2$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{h^2}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} s > 0 \\ h > 0 \end{array} \right.$$

$$s = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Delarnas höjder är

$$s = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad h - s = h - \frac{h}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h$$

**Svar**  $\frac{h}{\sqrt{2}}$  och  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h$

**10**

$$f(x) = x^3 - 4a^2x$$

$$F(x) = \int (x^3 - 4a^2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 4a^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2a^2x^2 + C$$

Eftersom  $F(2) = 4$  så får vi ekvationen

$$\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2a^2 \cdot 2^2 + C = 4$$

$$4 - 8a^2 + C = 4$$

$$C = 8a^2$$

Dvs.  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2a^2x^2 + 8a^2$ .

Minsta värdet för funktionen  $F$  är 0. Vi gör ett teckenschema för derivatan av funktionen  $F$ .

$$F'(x) = x^3 - 4a^2x$$

Derivatans nollställen:

$$x^3 - 4a^2x = 0$$

$$x(x^2 - 4a^2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x^2 = 4a^2$$

$$x = \pm\sqrt{4a^2}$$

$$x = \pm 2|a|$$

$$x = \pm 2a$$

1) Om  $a = 0$  så har derivatan endast ett nollställe  $x = 0$ .

Teckenschema:

$x$	-	+
$x^2$	+	+
$F'(x)$	-	+
$F(x)$	↘ ↗	

0  $x$

globalt  
minimiställe

Eftersom funktionen  $F$  är kontinuerlig antar funktionen  $F$ , enligt teckenschemat, sitt minsta värde i  $x = 0$ .

Vi får ekvationen

$$F(0) = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2a^2 \cdot 0^2 + 8a^2 = 0$$

$$8a^2 = 0$$

$$a^2 = 0$$

$$a = 0$$

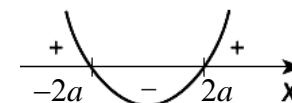
Dvs.  $a = 0$  duger.

2) Om  $a > 0$ , så har derivatan till funktionen  $F$  nollställena  $x = 0$  och  $x = \pm 2a$ .

Teckenschema:

$x$	-	-	+	+
$x^2 - 4a^2$	+	-	-	+
$F'(x)$	-	+	-	+
$F(x)$	↘ ↗ ↘ ↗			

-2a      0      2a       $x$



Eftersom funktionen  $F$  är kontinuerlig så antar funktionen  $F$ , enligt teckenschemat, sitt minsta värde i  $x = -2a$  eller i  $x = 2a$ .

Eftersom

$$\begin{aligned} \bullet F(-2a) &= \frac{1}{4} \cdot (-2a)^4 - 2a^2 \cdot (-2a)^2 + 8a^2 \\ &= 4a^4 - 8a^4 + 8a^2 \\ &= -4a^4 + 8a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet F(2a) &= \frac{1}{4} \cdot (2a)^4 - 2a^2 \cdot (2a)^2 + 8a^2 \\ &= -4a^4 + 8a^2 \end{aligned}$$

så antar funktionen  $F$  sitt minsta värde i  $x = \pm 2a$ .

Eftersom det minsta värdet är noll, får vi ekvationen

$$F(\pm 2a) = 0$$

$$-4a^4 + 8a^2 = 0$$

$$4a^2(-a^2 + 2) = 0$$

$$4a^2 = 0 \quad \text{eller} \quad -a^2 + 2 = 0$$

$$a^2 = 0 \quad \text{eller} \quad a^2 = 2$$

$$a = 0 \quad \text{eller} \quad a = \pm\sqrt{2} \quad | a > 0$$

$$a = \sqrt{2}$$

3) Om  $a < 0$  så har derivatan till funktionen  $F$  nollställena  $x = 0$  och  $x = \pm 2a$ .

Teckenschema:

$x$	-	-	+	+
$x^2 - 4a^2$	+	-	-	+
$F'(x)$	-	+	-	+
$F(x)$				
	$2a$	$0$	$-2a$	$x$



Eftersom funktionen  $F$  är kontinuerlig, så antar funktionen  $F$ , enligt teckenschemat, sitt minsta värde i  $x = -2a$  eller i  $x = 2a$ .

Eftersom

- $F(-2a) = -4a^4 + 8a^2$
- $F(2a) = -4a^4 + 8a^2$

så antar funktionen  $F$  sitt minsta värde i  $x = \pm 2a$ .

Eftersom det minsta värdet är noll, får vi ekvationen

$$F(\pm 2a) = 0 \quad | \text{Se punkt 1.}$$

$$a = 0 \quad \text{eller} \quad a = \pm\sqrt{2} \quad | a < 0$$

$$a = -\sqrt{2}$$

Punkterna 1, 2 och 3 ger att  $a = 0$  eller  $a = \pm\sqrt{2}$ .

**Svar**  $a = 0$  eller  $a = \pm\sqrt{2}$