

Prov 1

1

a) i) $1234 = 1,234 \cdot 10^3 \approx \underbrace{1,23}_{3 \text{ st}} \cdot 10^3 = 1230$

ii) $19,876 = 1,9876 \cdot 10^1 \approx 1,99 \cdot 10^1 = 19,9$

iii) $0,003066 = 3,066 \cdot 10^{-3} \approx 3,07 \cdot 10^{-3} = 0,00307$

Anmärkning. Nollor i början av decimaltal har ingen betydelse när man avrundar till ett visst antal gällande siffror eftersom de försvinner när man skriver om till tiopotensform. Därför säger man ofta att nollor i början av decimaltal inte är gällande siffror.

Observera också att talet 0 är ett specialfall. Det är inte relevant att tala om avrundning av talet 0 till ett visst antal gällande siffror, eftersom talet 0 inte kan skrivas i en tiopotensform där talet före tiopotensen ligger i intervallet $[1, 10[$ (vilket gäller för alla andra tal).

b) i) Exakta värdet är $T = \sqrt{e}$ och närmevärdet är $L \approx 1,65$. Felet är $T - L \approx \sqrt{e} - 1,65 \approx -0,001278\dots$, absoluta felet är $|T - L| \approx 0,001278\dots$ och relativa felet är $\frac{|T - L|}{T} \approx \frac{0,001278\dots}{\sqrt{e}} \approx 0,0007755\dots \approx 0,0008 \approx 0,08\%$.

ii) Exakta värdet är $T = \sin 1$ och närmevärdet är $L \approx 0,84$. Felet är $T - L \approx \sin 1 - 0,84 \approx 0,00147\dots$, absoluta felet är $|T - L| \approx 0,00147\dots$ och relativa felet är $\frac{|T - L|}{T} \approx \frac{0,00147\dots}{\sin 1} \approx 0,00174\dots \approx 0,0017 \approx 0,17\%$.

Svar a) i) 1230 ii) 19,9 iii) 0,00307

b) i) felet $-0,001278\dots$, absoluta felet $0,001278\dots$, relativa felet ungefär $0,08\%$ ii) felet $0,00147\dots$, absoluta felet $0,00147\dots$, relativa felet ungefär $0,17\%$

2

a) $2x^3 + 3x^2 + x$ | gemensam faktor
 $= x(2x^2 + 3x + 1)$

Nollställena för polynomet $2x^2 + 3x + 1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Dvs. $2x^2 + 3x + 1 = 2(x - (-\frac{1}{2}))(x - (-1)) = 2(x + \frac{1}{2})(x + 1)$, vilket ger

$$2x^3 + 3x^2 + x = x(2x^2 + 3x + 1) = x(2x + 1)(x + 1).$$

b) Termerna i polynomet $-4x^2 + 3x - 1$ har inga gemensamma faktorer och man hittar inte på ett enkelt sätt några faktorer med hjälp av minnesreglerna eller gruppering. Därför försöker vi faktorisera med hjälp av nollställena. Faktorer i den konstanta termen är ± 1 och faktorer i högsta grads termen är ± 4 , ± 2 och ± 1 , vilket ger att möjliga rationella nollställena är ± 1 , ± 2 och ± 4 . Test visar att $x = 1$ är ett nollställe: $-4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 0$. Polynomet är då delbart med binomet $(x - 1)$. Vi dividerar polynomen med hjälp av trappan:

$$\begin{array}{r} -4x^2 - 4x - 1 \\ x - 1 \overline{) -4x^3 - 3x - 1} \\ \underline{+ 4x^3 + 4x^2} \\ -4x^2 - 3x - 1 \\ \underline{+ 4x^2 + 4x} \\ -x - 1 \\ \underline{+ x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Dvs. $-4x^2 - 3x - 1 \square (x - 1)(-4x^2 - 4x - 1)$. Minnesreglerna ger ytterligare att

$$\begin{aligned} -4x^2 + 3x + 1 &= (x - 1)(-4x^2 - 4x - 1) \\ &= -(x - 1)((2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1) \\ &= (1 - x)(2x + 1)^2 \end{aligned}$$

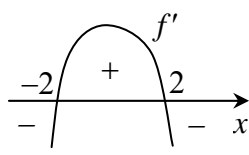
Svar a) $x(2x + 1)(x + 1)$ b) $(1 - x)(2x + 1)$

3

Vi skall visa att funktionen $f(x) \square -x^3 - 12x - 17$ har exakt ett nollställe. Funktionen är en deriverbar och kontinuerlig polynomfunktion. Vi gör ett teckenschema för funktionens derivata. Derivatans är

$$f'(x) \square -3x^2 - 12$$

Derivatans nollställena och graf:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 12 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$


Teckenschema:

	-2	2	
f'	-	+	-
f	↘ ↗ ↘		

Funktionsvärdena i extrempunkterna:

$$f(-2) = -(-2)^3 + 12 \cdot (-2) - 17 = -33$$

$$f(2) = -2^3 + 12 \cdot 2 - 17 = -1.$$

I intervallet $[-2, \infty[$ finns inga nollställena, eftersom funktionens största värde i det här intervallet är -1 enligt teckenschemat. Eftersom funktionen är strängt avtagande i intervallet $]-\infty, -2[$, så finns det högst ett nollställe i intervallet. Dvs. funktionen har högst ett nollställe i hela \mathbb{R} .

Eftersom

$$f(-5) = 48 > 0 \quad \text{och} \quad f(-4) = -1 < 0$$

och funktionen f är kontinuerlig överallt, så har funktionen f , enligt Bolzanos sats, åtminstone ett nollställe i intervallet $]-5, -4[$. Eftersom funktionen samtidigt enligt ovan har högst ett nollställe, så får vi att den har exakt ett nollställe. \square

a) Vi löser ut roten x ur ekvationen $-x^3 - 12x - 17 \square 0$ på följande sätt:

$$\begin{aligned} -x^3 + 12x - 17 &= 0 \\ x^3 &= 12x - 7 \\ x &= \sqrt[3]{12x - 7}. \end{aligned}$$

Vår iterationsfunktion blir då $g(x) = \sqrt[3]{12x - 7}$. Vi väljer $x_0 \square -4$ som startvärde och tabellerar resultatet:

n	x_n
0	-4
1	-4,020725759...
2	-4,025847391...
3	-4,027111014...
4	-4,027422657...
5	-4,027499509...
6	-4,02751846...
7	-4,02752313...

På räknare:

- 1) -4 EXE
- 2) $3^x \sqrt[3]{(12 \text{Ans} - 17)}$

Roten ser ut att vara $-4,028$ med tre decimalers noggrannhet.

Vi visar också noggrannheten i svaret: Eftersom

$$f(-4,0275) = -9,04 \dots \cdot 10^{-4} < 0$$

$$f(-4,0285) = 0,035 \dots > 0,$$

så ger Bolzanos sats att nollstället ligger i intervallet $]-4,0275; -4,0285[$. Ett närmevärde för nollstället med tre decimalers noggrannhet är då $-4,028$.

- b) Vi väljer t.ex. utgående från grafen på en grafisk räknare intervallet $[-4,1; -4,0]$.

$$f(-4,1) = 2,7 \dots > 0$$

$$f(-4,0) = -1 < 0$$

Bolzanos sats ger att det finns ett nollställe i intervallet $]-4,1; -4,0[$. Med gaffelmetoden väljer vi ett nytt intervall, t.ex. $[-4,03; -4,01]$.

$$f(-4,03) = 0,09 \dots > 0$$

$$f(-4,01) = -0,63 \dots < 0$$

Bolzanos sats ger att det finns ett nollställe i intervallet $]-4,03; -4,01[$. Vi fortsätter med gaffelmetoden. Slutligen hittar vi ett intervall som innehåller nollstället och vars tal avrundade till tre decimalers noggrannhet ger samma tal. T.ex. intervallet $]-4,0275; -4,0285[$. Rotens närmevärde är då $-4,028$.

Svar a) $-4,028$ b) $-4,028$

4

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{P(x)}{M(x)} &= \frac{-2x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 2x}{-x} \\ &= \frac{-2x^4}{-x} + \frac{-7x^3}{-x} + \frac{-7x^2}{-x} + \frac{-2x}{-x} && \left| \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right. \\ &= 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 && \left. \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(x) &= -2x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 2x && | \text{ a-fallet} \\ &= -x(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) \end{aligned}$$

Genom att dividera polynomet $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ med trinomet $T(x) = 2x^2 + 3x + 1$ t.ex. med hjälp av trappan, ser vi att divisionen går jämnt ut och kvoten är $x + 2$. Dvs. om vi dividerar polynomet $P(x)$ med trinomet $T(x)$, får vi polynomet $-x(x + 2) = -x^2 - 2x$.

- c) Utgående från punkterna a och b får vi att

$$\begin{aligned} P(x) &= -x(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) \\ &= -x(x + 2)(2x^2 + 3x + 1), \end{aligned}$$

vilket ger

$$\frac{P(x)}{x+2} = -x(2x^2 + 3x + 1) = -2x^3 - 3x^2 - x.$$

Svar a) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ b) $-x^2 - 2x$ c) $-2x^3 - 3x^2 - x$

5

Newtons algoritm: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Eftersom $x = \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow x^3 = 10 \Leftrightarrow x^3 - 10 = 0$,

så är $x = \sqrt[3]{10}$ det enda nollstället till funktionen $f(x) = x^3 - 10$. Vi tillämpar Newtons metod på denna funktion. Funktionen derivata är $f'(x) = 3x^2$, vilket ger rekursionsformeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 10}{3x_n^2} = x_n - \frac{1}{3}x_n + \frac{10}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{10}{3x_n^2}.$$

Vi väljer $x_0 = 2$ som startvärde.

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{10}{3 \cdot 2^2} = 2,1666\dots$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \cdot 2,1666\dots + \frac{10}{3 \cdot 2,1666\dots^2} = 2,15450\dots$$

$$x_3 = 2,154434\dots$$

$$x_4 = 2,154434\dots$$

Talet 2,15443 ser ut att vara ett närmevärde för $\sqrt[3]{10}$ med fem decimalers noggrannhet. Vi kontrollerar resultatet: eftersom

$$f(2,154425) = -1,349\dots \cdot 10^{-4} < 0$$

$$f(2,154435) = 4,316\dots \cdot 10^{-6} > 0,$$

så ligger nollstället, enligt Bolzanos sats, i intervallet $]2,154425; 2,154435[$.

Talet 2,15443 är då ett närmevärde för nollstället med fem decimaler.

Svar 2,15443

6

Vi undersöker funktionen $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+1}$.

Vi beräknar ett närmevärde för derivatan med hjälp av centraldifferensen:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Nu är $h = 0,001$; $x_0 = 0$ och $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+1}$, vilket ger

$$\begin{aligned} f'(0) &\approx \frac{f(0+0,001) - f(0-0,001)}{2 \cdot 0,001} \\ &= \frac{f(0,001) - f(-0,001)}{0,002} \\ &= \frac{\ln(2,001) - \ln(1,999)}{0,002} \\ &= -0,193147207\dots \end{aligned}$$

Vi beräknar ett exakt värde för derivatan:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x+2)}{x+1} \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+2} \cdot (x+1) - 1 \cdot \ln(x+2)}{(x+1)^2} \quad |_{x=0} \\ f'(0) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 - \ln 2}{1} = \frac{1}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

Absoluta felet är

$$\Delta x = \left| \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right) - (-0,193147207\dots) \right| = 0,000\,000\,026\,48\dots \text{ och}$$

relativa felet är

$$\frac{\Delta x}{\left| \frac{1}{2} - \ln 2 \right|} = \frac{0,000\,000\,026\,48\dots}{\left| \frac{1}{2} - \ln 2 \right|} = 0,000\,000\,137\dots = 1,37 \cdot 10^{-5} \%$$

Svar $f'(0) \approx -0,193147\dots$; relativa felet är $1,37 \cdot 10^{-7}$

7

a) Taylorpolynommetoden är

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Vi beräknar derivatorna för funktionen f .

$$f(x) = e^{-x} + x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -e^{-x} + 1, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x}, \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = -e^{-x}, \quad f'''(0) = -1$$

Vi får att

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

b) Ekvationen $2x \square e^{-x}$ är ekvivalent med ekvationen $e^{-x} - x \square 0$. Dvs. vi söker nollställena för den kontinuerliga och deriverbara funktionen $g(x) \square e^{-x} - x$. Vi får att $g'(x) \square -e^{-x} - 1 < 0$ överallt, vilket ger att funktionen g har högst ett nollställe. Rekursionsformeln för Newtons metod är

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}.$$

Vi väljer som startvärde $x_0 \square 1$. Vi får

$$x_1 = 1 + \frac{e^{-1} - 1}{e^{-1} + 1} = 0,53788\dots$$

$$x_2 = 0,53788\dots + \frac{e^{-0,53788\dots} - 0,53788\dots}{e^{-0,53788\dots} + 1} = 0,56698\dots$$

$$x_3 = 0,567143\dots$$

$$x_4 = 0,567143\dots$$

Med fyra decimalers noggrannhet ser lösningen ut att vara 0,5671. Vi kontrollerar resultatet: eftersom g är kontinuerlig (summan av en exponentialfunktion och den identiska funktionen) och

$$g(0,56705) = 1,462\dots \cdot 10^{-4} > 0$$

$$g(0,56715) = -1,051\dots \cdot 10^{-5} < 0,$$

så ger Bolzanos sats att det finns ett nollställe i intervallet $]0,56705; 0,56715[$. Avrundat till fyra decimaler är närmevärdet för nollstället 0,5671.

Sedan löser vi ekvationen $2x \square P_3(x)$. Vi får att

$$\begin{aligned} 2x = P_3(x) &\Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0 \quad | \cdot (-6) \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 12x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Dvs. vi söker nollställena för funktionen $h(x) = x^3 - 3x^2 - 12x - 6$.
Derivatan $h'(x) = 3x^2 - 6x - 12$ ger att rekursionsformeln för Newtons metod är

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 12x_n - 6}{3x_n^2 - 6x_n - 12} = \frac{2x_n^3 - 3x_n^2 + 6}{3x_n^2 - 6x_n - 12}.$$

Vi väljer igen $x_0 = 1$ som startvärde. Vi får att

$$x_1 = 0,555555\dots$$

$$x_2 = 0,564707\dots$$

$$x_3 = 0,564719\dots$$

$$x_4 = 0,564719\dots$$

Lösningen ser ut att vara 0,5647 med fyra decimalers noggrannhet.
Eftersom h är en kontinuerlig polynomfunktion och eftersom $h(0,56465) = -6,617\dots \cdot 10^{-4} < 0$
 $h(0,56475) = 2,951\dots \cdot 10^{-4} > 0$,

så ger Bolzanos sats att h har ett nollställe i intervallet $]0,56465; 0,56475[$. Dvs. ett närmevärde för lösningen med fyra decimalers noggrannhet är verkligen 0,5647.

- c) $T = 0,5671$ är ett närmevärde med fyra decimalers noggrannhet för roten till ekvationen $2x = e^{-x}$ och $L = 0,5647$ är ett närmevärde med fyra decimalers noggrannhet för ekvationen $2x = P_3(x)$. Relativa felet är då

$$\frac{|T - L|}{|T|} = \frac{|0,5671 - 0,5647|}{|0,5671|} = 0,004232\dots \approx 0,42\%.$$

Svar a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ b) 0,5671; 0,5647 c) 0,42%

8

$$\begin{aligned} \int_2^6 f(x) dx &\approx 0,5 \cdot \left(\frac{1}{2} f(2) + f(2,5) + f(3) + \dots + f(5,5) + \frac{1}{2} f(6) \right) \\ &= 0,5 \cdot (1,575 + 3,62 + 4,55 + \dots + 3,95 + 1,875) \\ &= 17,335 \end{aligned}$$

Svar 17,335

Prov 2

1

- a) Anta att övre närmevärdet är L . Relativa felet är 2 % och $L \approx 3$, vilket ger

$$\left| \frac{3-L}{3} \right| = 0,02$$

$$\frac{L-3}{3} = 0,02$$

$$L-3 = 0,06$$

$$L = 3,06.$$

Relativa felet för närmevärdet $f(L) \approx L^3$ i jämförelse med det exakta värdet $f(3) \approx 3^3$ är då

$$\left| \frac{3^3 - L^3}{3^3} \right| = \left| \frac{3^3 - 3,06^3}{3^3} \right| = 0,061208 \approx 6\%.$$

- b) Anta att det nedre närmevärdet är L . Relativa felet är 5 % och $L \approx 8$, vilket ger

$$\left| \frac{8-L}{8} \right| = 0,05$$

$$\frac{8-L}{8} = 0,05$$

$$8-L = 0,4$$

$$L = 7,6.$$

Relativa felet för närmevärdet $f(L) \approx L^3$ i jämförelse med det exakta värdet $f(8) \approx 8^3$ är då

$$\left| \frac{8^3 - L^3}{8^3} \right| = \left| \frac{8^3 - 7,6^3}{8^3} \right| = 0,142625 \approx 14\%.$$

Anmärkning. Relativa felet för närmevärdet $L^3 \approx L \cdot L \cdot L$ för produkten $x^3 \approx x \cdot x \cdot x$ är ganska exakt tre gånger större än relativa felet när närmevärdet L jämförs med exakta värdet x .

Svar a) ungefär 0,0612 b) ungefär 0,1426

2

Rötterna till ekvationen $x^3 - 3x - 1 \approx 0$ är samma som nollställena för funktionen $f(x) \approx x^3 - 3x - 1$. Funktionen är en kontinuerlig polynomfunktion.

- 1) Vi beräknar funktionens värde i ändpunkterna av intervallet $[1, 2]$:

$$f(1) \approx 1^3 - 3 \cdot 1 - 1 \approx -1 \approx 0$$

$$f(2) \approx 2^3 - 3 \cdot 2 - 1 \approx 3 \approx 0.$$

Eftersom värdena har olika tecken, så ger Bolzanos sats att funktionen har åtminstone ett nollställe i intervallet $]1, 2[$.

- 2) Funktionen derivata är $f'(x) \approx 3x^2 - 3$. I intervallet $]1, 2[$ är

$$f'(x) \approx 3x^2 - 3 \approx 3 \cdot 1^2 - 3 \approx 0,$$

vilket ger att f är strängt växande i intervallet $[1, 2]$. Funktionen f har då högst ett nollställe i intervallet $[1, 2]$.

Punkterna 1 och 2 ger att funktionen f har exakt ett nollställe i intervallet $[1, 2]$, dvs. ekvationen $x^3 - 3x - 1 \approx 0$ har exakt en rot i intervallet $[1, 2]$. □

- a) Vi bestämmer ett närmevärde för roten med hjälp av halveringsmetoden.

Intervall	Intervallets mittpunkt c	$f(c)$
$[1, 2]$	1,5	$-0,125 \approx 0$
$[1,5; 2]$	1,75	$1,109... \approx 0$
$[1,5; 1,75]$	1,625	$0,416... \approx 0$
$[1,5; 1,625]$	1,5625	$0,127... \approx 0$
$[1,5; 1,5625]$	1,53125	$-0,003... \approx 0$
$[1,53125; 1,5625]$	1,546875	$0,06... \approx 0$
$[1,53125; 1,546875]$	1,5390625	$0,02... \approx 0$
$[1,53125; 1,5390625]$	1,53515625	$0,01... \approx 0$
$[1,53125; 1,53515625]$	1,533203125	$0,004... \approx 0$
$[1,53125; 1,533203125]$	1,532226563	$0,0005... \approx 0$
$[1,53125; 1,532226563]$	1,531738282	$-0,001... \approx 0$
$[1,531738282; 1,532226563]$		

4

Vi får

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^{2008} + x^{2006} + 2007x &= 0 \\ x(x^{2007} + x^{2005} + 2007) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{eller} \quad \underbrace{x^{2007} + x^{2005} + 2007}_{g(x)} &= 0. \end{aligned}$$

Funktionen f har åtminstone ett nollställe $x \leq 0$. Vi skall undersöka om funktionen g har några nollställen. Derivatans är

$$g'(x) = 2007x^{2006} + 2005x^{2004} = \underbrace{x^{2004}}_{\geq 0} \underbrace{(2007x^2 + 2005)}_{> 0}.$$

=0 bara när $x=0$

Derivatans är åtminstone noll överallt och noll endast i en enskild punkt $x \leq 0$, vilket ger att g är strängt växande i hela \mathbb{R} . Då har funktionen g högst ett nollställe, vilket ger att funktionen f har högst två nollställen. Eftersom

$$g(-2) = \underbrace{(-2)^{2007}}_{< -2007} + \underbrace{(-2)^{2005}}_{< 0} + 2007 < 0$$

$$g(-1) = (-1)^{2007} + (-1)^{2005} + 2007 = -1 - 1 + 2007 = 2005 > 0$$

och g är kontinuerlig, ger Bolzanos sats att g har ett nollställe i intervallet $]-2, -1[$. Dvs. funktionen g har ett nollställe som är mindre än det nollställe $x \leq 0$ för funktionen f som vi hittade tidigare. Funktionen f har då exakt två reella nollställen. \square

Vi bestämmer ett närmevärde för det mindre nollstället för funktionen f , dvs. det enda nollstället för funktionen g . Grafen till funktionen g är starkt fallande när man förflyttar sig från värdet $x \leq -1$ till vänster. Tangenterna är nästan lodräta, vilket ger att iteration med Newtons metod konvergerar mycket långsamt mot nollstället. Vi hittar nollstället mycket snabbare genom att använda gaffelmetoden och räknaren. Gaffelmetoden kan tillämpas t.ex. på följande sätt:

$$\begin{aligned} g(-1,1) &\leq 0, \quad g(-1,01) \leq 0, \quad g(-1,001) \leq 0, \quad g(-1,005) \leq 0, \\ g(-1,004) &\leq 0, \quad g(-1,003) \leq 0, \quad g(-1,0035) \leq 0. \end{aligned}$$

Vi ser att nollstället ligger i intervallet $]-1,0035; -1,003[$, vilket ger att nollstället givet med tre decimalers noggrannhet är $-1,003$.

Svar $-1,003$

5

a) $x^2 - 2x - 5 = 0$

Rotformeln ger

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}.$$

Diskriminanten är negativ, vilket ger att det inte finns några reella rötter. De imaginära rötterna är

$$x = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

b) $x^4 + 2x^2 = 3$

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

Vi betecknar $x^2 = t$, vilket ger

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$t = 1 \quad \text{eller} \quad t = -3$$

$$x^2 = 1 \quad \text{eller} \quad x^2 = -3$$

$$x = \pm 1 \quad \text{eller} \quad x = \pm i\sqrt{3}.$$

Svar a) $x = 1 \pm 2i$

b) $x = \pm 1$ eller $x = \pm i\sqrt{3}$

6

$$x^3 - 4,5x^2 + 4x + 2,5 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2x^3 - 9x^2 + 8x + 5 = 0$$

Den senare ekvationen har endast heltalskoefficienter. Faktorer i den konstanta termen 5 är ± 1 och ± 5 . Koefficienten 2 för högsta grads term har faktorerna ± 1 och ± 2 . Möjliga rationella rötter till ekvationen är då ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$, ± 5 och $\pm \frac{5}{2}$. Test visar att $x = \frac{5}{2}$ är en rot:

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{5}{2} + 5 = 0.$$

Eftersom $x = \frac{5}{2}$ är ett nollställe till polynomet $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 8x + 5$, så är polynomet delbart med binomet $2(x - \frac{5}{2}) = 2x - 5$. Vi dividerar med hjälp av trappan.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 1 \\ 2x - 5 \overline{) 2x^3 - 9x^2 + 8x + 5} \\ \underline{\mp 2x^3 \quad \mp 5x^2} \\ -4x^2 + 8x + 5 \\ \underline{\pm 4x^2 \mp 10x} \\ -2x + 5 \\ \underline{\pm 2x \mp 5} \\ 0 \end{array}$$

Ekvationen $2x^3 - 9x^2 + 8x + 5 = 0$ kan skrivas om till produktformen $(2x - 5)(x^2 - 2x - 1) = 0$. Vi bestämmer de övriga rötterna:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Svar $x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$

7

Vi skall bestämma rötterna till ekvationen $\sin x - 2e^x = 0$, dvs. nollställena för funktionen $f(x) = \sin x - 2e^x$.

Algoritmen för allmänna sekantmetoden är

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= x_n - (\sin x_n - 2e^{x_n}) \frac{x_n - x_{n-1}}{\sin x_n - 2e^{x_n} - \sin x_{n-1} + 2e^{x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Startvärdena $x_0 = -4$ och $x_1 = -2$ ger

$x_2 = -3,241980\dots$	På räknare (TI):
$x_3 = -3,219200\dots$	$-4 \rightarrow A \quad \text{ENTER}$
$x_4 = -3,221473\dots$	$-2 \rightarrow B \quad \text{ENTER}$
$x_5 = -3,221470\dots$	$B - (\sin B - 2e^B)(B - A) / (\sin B - 2e^B - \sin A + 2e^A) \rightarrow C: B \rightarrow A: C \rightarrow B$

Vi trycker upprepade gånger på ENTER-knappen.

Roten ser ut att vara $-3,221$, givet med fyra gällande siffror. Vi undersöker noggrannheten: Eftersom f är kontinuerlig och

$$\begin{aligned} f(-3,2205) &= -0,001\dots < 0 \\ f(-3,2215) &= 3,1\dots \cdot 10^{-5} > 0, \end{aligned}$$

så ger Bolzanos sats att funktionen har ett nollställe i intervallet $]-3,2205; -3,2215[$. Dvs. nollstället är $-3,221$, givet med fyra gällande siffror.

Svar $-3,221$

8

Vi beräknar först funktionsvärdena

$$f(0) = \cos \frac{0}{3} = \cos 0 = 1$$

och

$$f(\pi) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Dvs. interpolationslinjen går genom punkterna $(0, 1)$ och $(\pi, \frac{1}{2})$. Linjens riktningskoefficient är

$$k = \frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - \pi} = -\frac{1}{2\pi}, \text{ och}$$

interpolationslinjens ekvation är

$$y - 1 = -\frac{1}{2\pi}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{2\pi}x + 1.$$

Linjär interpolering ger

$$f(0,5) \approx -\frac{1}{2\pi} \cdot 0,5 + 1 = 0,92042\dots \approx 0,9204.$$

Relativa felet är

$$\left| \frac{f(0,5) - 0,9204}{f(0,5)} \right| = \left| \frac{\cos \frac{0,5}{3} - 0,9204}{\cos \frac{0,5}{3}} \right| = 0,0666\dots \approx 6,7\%.$$

Svar $y = -\frac{1}{2\pi}x + 1$, $f(0,5) \approx 0,9204$, relativa felet 6,7 %

Prov 3

1

- a) i) Närmevärdet skrivet på formen $0,067050$ anger att svaret har avrundats till 6 decimalers noggrannhet. Enda sättet att skriva närmevärdet i tiopotensform så att informationen om noggrannheten bibehålls är $0,067050 \square 6,7050 \cdot 10^{-2}$. Koefficienten har 5 siffror, vilket betyder att antalet gällande siffror är 5.
- ii) $-670,50 \square -6,7050 \cdot 10^2$, vilket ger att antalet gällande siffror är 5.
- iii) Närmevärdet är färdigt i tiopotensform, vilket ger att vi direkt ser att antalet gällande siffror är 4.
- b) i) När ett närmevärde är skrivet i tiopotensform anger antalet siffror i koefficienten avrundningsnoggrannheten. Antalet siffror i koefficienten är samma som antalet gällande siffror. Om man har avrundat till 4 gällande siffror, så skriver man $670500 \square 6,705 \cdot 10^5$.
- ii) På motsvarande sätt med 5 gällande siffror: $670500 \square 6,7050 \cdot 10^5$.
- iii) På motsvarande sätt med 6 gällande siffror: $670500 \square 6,70500 \cdot 10^5$.

Svar a) i) 5 ii) 5 iii) 4

b) i) $6,705 \cdot 10^5$ ii) $6,7050 \cdot 10^5$ iii) $6,70500 \cdot 10^5$

2

- a) Funktionen $f(x) = x^{\sqrt{x}} - 50$ är deriverbar i intervallet $x > 1$ (och då också kontinuerlig) eftersom

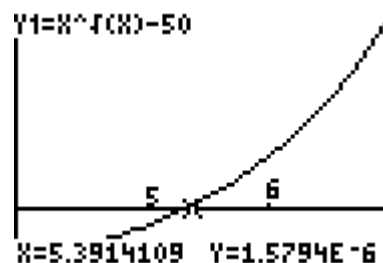
$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\sqrt{x}} - 50 & \left| \begin{array}{l} a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a} \\ e^{\ln a^b} = e^{b \ln a} \end{array} \right. \\ &= e^{\ln x \sqrt{x}} - 50 \\ &= e^{\sqrt{x} \ln x} - 50 \end{aligned}$$

och exponentialfunktionen, kvadratrotsfunktionen, logaritmfunktionen och den konstanta funktionen är deriverbara i sin definitionsmängd.

Vi söker ett heltalsintervall där funktionen byte tecken. Vi tabellerar några värden:

x	$f(x) = x^{\sqrt{x}} - 50$	Funktionens tecken
1	-49	negativ
2	-47,334...	negativ
3	-43,295...	negativ
4	-34	negativ
5	-13,445...	negativ
6	30,551	positiv

Vi ser att den kontinuerliga funktionen $f(x)$ har olika tecken för $x \square 5$ och $x \square 6$. Bolzanos sats ger då att det finns åtminstone ett nollställe (en rot) i intervallet $5 < x < 6$.



- b) Funktionen $f(x) = x^{\sqrt{x}} - 50$ är strängt växande i intervallet $x > 1$ eftersom båda basen $x > 1$ och exponenten \sqrt{x} växer (strängt) när x växer. En strängt växande funktion har högst ett nollställe. Tillsammans med a-fallet ger detta att funktionen har exakt ett nollställe.

- c) i) Vi tillämpar Bolzanos sats på allt mindre intervall:

Funktionens värde och tecken	Rotens läge	Intervallets bredd
$f(5) \approx -13,45 < 0$ $f(6) \approx 30,551 > 0$]5, 6[$6 - 5 \approx 1$
$f(5,3) \approx -3,505 < 0$ $f(5,4) \approx 0,34187 > 0$]5,3; 5,4[0,1
$f(5,39) \approx -0,0559 < 0$ $f(5,40) \approx 0,34187 > 0$]5,39; 5,40[0,01
$f(5,390) \approx -0,0559 < 0$ $f(5,395) \approx 0,14259 > 0$]5,390; 5,395[0,005

Eftersom alla tal i intervallet $5,390 < x < 5,395$ avrundade till två decimaler ger talet 5,39, så är 5,39 ett närmevärde för den sökta roten med två decimalers noggrannhet.

- ii) I Newtons metod måste man känna funktionens derivata.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D\left(e^{\sqrt{x} \ln x} - 50\right) \quad | \quad D e^{s(x)} = e^{s(x)} \cdot s'(x) \\
 &= e^{\sqrt{x} \ln x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{x} \sqrt{x} \right) \\
 &= x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right)
 \end{aligned}$$

Rekursionsformeln för Newtons metod är $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, vilket ger

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\sqrt{x_n}} - 50}{\frac{x_n^{\sqrt{x_n}}}{\sqrt{x_n}} \left(\frac{1}{2} \ln x_n + 1 \right)}$$

Vi väljer $x_0 = 5,5$ som startvärde. Rekursionsformeln ger följande talföljd:

n	x_n
0	5,395709646...
1	5,391417792...
2	5,39141086...
3	5,39141086...

Ett närmevärde för roten med två decimaler är då 5,39. Noggrannheten är kontrollerad redan i i-fallet.

Svar

a) talen 5 och 6

c) 5,39

3

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & -4x^3 + 12x^2 - 9x && \left. \begin{array}{l} \text{gemensam faktor:} \\ ma + mb = m(a + b) \end{array} \right| \\
 & = -x(4x^2 - 12x + 9) && \left| a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \right. \\
 & = -x((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2) \\
 & = -x(2x - 3)^2
 \end{aligned}$$

- b) Vi söker möjliga rationella rötter för den ekvation $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ som svarar mot uttrycket $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$. Polynomet kan då faktoriseras med hjälp av nollställena.

Ekvationens koefficienter är heltal. Faktorer i den konstanta termens koefficient $a_0 \square 20 \square 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5$ är $\square 1, \square 2, \square 4, \square 8, \square 10, \square 20$ och faktorer i högsta grads termens koefficient $a_3 = 1$ är $\square 1$. Täljaren p i den möjliga rationella roten $x = p/q$ är faktor i den konstanta termens koefficient och nämnaren q är faktor i högsta grads termens koefficient. Möjliga rationella rötter är då $\square 1, \square 2, \square 4, \square 8, \square 10, \square 20$.

Genom att testa de möjliga rationella rötterna ser vi att

$$x = 2 \text{ är en lösning, eftersom } 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 20 = 0$$

$$x = -2 \text{ är en lösning, eftersom } (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 20 = 0$$

$$x = 5 \text{ är en lösning, eftersom } 5^3 - 5 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 20 = 0.$$

Övriga möjliga rationella rötter lönar det sig inte att testa, eftersom en tredje grads ekvation har högst tre rötter.

Eftersom $P_3(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, där x_1, x_2 och x_3 är nollställena till polynomet, så är

$$\begin{aligned}
 x^3 - 5x^2 - 4x + 20 &= 1 \cdot (x - 2)(x - (-2))(x - 5) \\
 &= (x - 2)(x + 2)(x - 5).
 \end{aligned}$$

Svar

a) $-x(2x - 3)^2$

b) $(x - 5)(x - 2)(x + 2)$

4

- a) Talen $-2, 1$ och 2 är nollställena för polynomet om $(x - 2), (x - 1)$ och $(x + 2)$ är faktorer i polynomet. Vi söker dessutom en koefficient a_3 för högsta grads termen, så att $P(x) = a_3(x + 2)(x - 1)(x - 2)$ antar värdet 8 för $x \square 0$.

$$P(0) = a_3(0 + 2)(0 - 1)(0 - 2) = 4a_3 = 8$$

$$a_3 = 2$$

Det sökta polynomet är

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 2(x + 2)(x - 1)(x - 2) && \left| (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \right. \\
 &= 2(x - 1)(x^2 - 4) \\
 &= 2(x^3 - 4x - x^2 + 4) \\
 &= 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8.
 \end{aligned}$$

- b) Vi tillämpar nollregeln för en produkt på ekvationen $(3 + 4x^2)(x^2 - 12) = 0$.

$$1) \quad 3 + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = -3 \quad | :4$$

$$x^2 = -\frac{3}{4}$$

ingen reell rot

Komplexa rötter:

$$x^2 = -\frac{3}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

2) $x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 12$

$x^2 = 4 \cdot 3 \quad |\sqrt{\quad}, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$x = \pm 2\sqrt{3}$

Svar

a) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$

b) reella rötter $x = \pm 2\sqrt{3}$, komplexa rötter $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5a) Vi utför divisionen $\frac{-x^3 - x^2 + 7x - 2}{2 - x}$ med hjälp av trappan.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad \begin{array}{r} x^2 \quad 3x - 1 \\ -x^3 - x^2 \quad 7x - 2 \\ \hline -3x^2 \quad 7x - 2 \\ 3x^2 \quad 6x \\ \hline x - 2 \\ x \quad 2 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

Observera att termernas ordningsföljd är ombytt i nämnaren.

Divisionen gick jämnt upp eftersom resten är noll. Divisionens kvoten blev $x^2 + 3x - 1$.b) Vi utför divisionen $\frac{3 - 2x + 4x^2}{2 - x}$ med hjälp av trappan.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad \begin{array}{r} -4x - 6 \\ 4x^2 - 2x \quad 3 \\ \hline -3 - 2x + 4x^2 \\ 6x \quad 3 \\ \hline 6x \quad 12 \\ \hline 15 \end{array}
 \end{array}$$

Termernas ordningsföljd måste bytas så att den blir fallande:

$-3 - 2x + 4x^2 = 4x^2 - 2x - 3$

$2 - x = -x + 2$

Divisionen gick inte jämnt upp eftersom resten är $15 \neq 0$.Vid division får man att $\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{J(x)}{Q(x)}$, där $V(x)$ är kvoten och $J(x)$ är resten.

Dvs. $\frac{3 - 2x + 4x^2}{2 - x} = -4x - 6 + \frac{15}{2 - x}$.

Svar a) $x^2 + 3x - 1$ b) $-4x - 6 + \frac{15}{2 - x}$

6

$f(x) \square e^{-x}, 1, x \in [1, 2]$

Funktionen f 's derivata är $f'(x) \square -e^{-x} \square 0$, vilket ger att f är strängt avtagande. Den antar då sitt största värde i intervallet $[1, 2]$ i $x \square 1$ och sitt minsta värde i $x \square 2$. Eftersom

$f(1) \square e^{-1} \square 1 \square 1, 1 \square 2$ och $f(2) \square e^{-2} \square 1 \square 1$,

så är $1 \square f(x) \square 2$ i intervallet $[1, 2]$.

Den andra derivatan är $f''(x) \approx e^{-x} \approx 0$, vilket ger att derivatan är strängt växande. Eftersom derivatan är negativ överallt, antar den sitt största absoluta värde i intervallet $[1, 2]$ för $x \approx 1$. Vi får att

$$|f'(1)| \approx | -e^{-1} | \approx e^{-1} \approx 0,37 \approx 0,4,$$

vilket ger att $|f'(x)| \approx 0,4$ i intervallet $[1, 2]$.

Vi beräknar termerna i talföljden x_0, x_1, x_2, \dots med rekursionsformeln $x_n \approx f(x_{n-1})$ och startvärdet $x_0 \approx 1,3$. Vi får att

$$x_1 \approx f(x_0) \approx f(1,3) \approx e^{-1,3} \approx 1 \approx 1,272531\dots$$

$$x_2 \approx f(x_1) \approx 1,280121\dots$$

$$x_3 \approx 1,278003\dots$$

$$x_4 \approx 1,278592\dots$$

$$x_5 \approx 1,278428\dots$$

$$x_6 \approx 1,278474\dots$$

$$x_7 \approx 1,278461\dots$$

Lösningen ser ut att vara 1,278, givet med fyra gällande siffror. Vi kontrollerar: eftersom $f(1,2775) - 1,2775 \approx 0$ och $f(1,2785) - 1,2785 \approx 0$ och eftersom funktionen $f(x) - x$ är kontinuerlig, så ger Bolzanos sats att funktionen $f(x) - x$ har ett nollställe, dvs. ekvationen $x \approx f(x)$ en lösning, i intervallet $]1,2775; 1,2785[$. Ett närmevärde för lösningen given med fyra gällande siffror är då 1,278.

Anmärkning. De handlar naturligtvis om fixpunktsmetoden. Villkoret $1 \approx f(x) \approx 2$ garanterar att fixpunkten existerar eftersom villkoret ger att $f(1) - 1 \approx 0$ och $f(2) - 2 \approx 0$. Detta ger i sin tur, enligt Bolzanos sats, att funktionen $f(x) - x$ har ett nollställe, vilket är samma som att ekvationen $x \approx f(x)$ har en lösning, dvs. funktionen f har en fixpunkt i intervallet $[1, 2]$. Derivatavillkoret $|f'(x)| \approx 0,4$ garanterar att iterationen med funktionen f konvergerar mot fixpunkten (se konvergensvillkoret i boken sid 74).

Svar $x \approx 1,278$

7

Funktionen som skall integreras är $f(x) = \frac{1}{x}$ och delintervallens längd är

$$h = \frac{3-1}{2} = 1. \text{ Simpsons regel ger}$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{h}{3} (f(1) + 4f(2) + f(3)) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Felformeln ger att

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180 \cdot 2^4} = -\frac{(3-1)^5 f^{(4)}(t)}{180 \cdot 2^4} = -\frac{1}{90} f^{(4)}(t), \text{ där } 1 < t < 3.$$

Vi bestämmer derivatorna:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3},$$

$$f'''(x) = -6x^{-4}, \quad f^{(4)}(x) = 24x^{-5}.$$

Absolutbeloppet av fjärde derivatan, $|f^{(4)}(x)| = \frac{24}{|x|^5}$, är strängt avtagande i intervallet $[1, 3]$. Det är då mindre än $|f^{(4)}(1)| = \frac{24}{1^5} = 24$ i intervallet $]1, 3[$.

Absoluta värdet av felet kan då uppskattas uppåt med

$$|E_2| = \frac{1}{90} |f^{(4)}(t)| < \frac{24}{90} = \frac{4}{15} \approx 0,2667.$$

Integralens exakta värde är $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$, vilket ger att

absoluta värdet av felet i närmevärdet $1\frac{1}{9}$ är $|\ln 3 - 1\frac{1}{9}| \approx 0,0125$.

Svar $\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1\frac{1}{9}$, absoluta felet $< 0,2667$, exakta värdet $\ln 3$,

verkliga absoluta felet ungefär 0,0125

8

a) Ett närmevärde för derivatan får vi med vänsterdifferenskvoten:

$$\begin{aligned} f'(4) &\approx \frac{f(4) - f(4-h)}{h} \\ &= \frac{4\sqrt{4} - (4-h)\sqrt{4-h}}{h} \quad | h = 10^{-2} = 0,01 \\ &= \frac{16 - 3,99\sqrt{3,99}}{0,01} \approx 13,4914427. \end{aligned}$$

Högerdifferenskvoten ger att

$$f'(4) \approx \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{4,01\sqrt{4,01} - 16}{0,01} \approx 13,5991816 \text{ och}$$

centraldifferensen ger slutligen

$$f'(4) \approx \frac{f(4+h) - f(4-h)}{2h} = \frac{4,01\sqrt{4,01} - 3,99\sqrt{3,99}}{0,02} \approx 13,54531215.$$

b) Relativa felet är $\left| \frac{T-L}{T} \right|$, där T är exakt värde och L närmevärdet. Nu är

$$T = f'(4) = 8(1 + \ln 2) \approx 13,54517744.$$

Om $h = 10^{-1}$, så ger centraldifferensen ett närmevärde för derivatan:

$$\frac{f(4+h) - f(4-h)}{2h} = \frac{4,1\sqrt{4,1} - 3,9\sqrt{3,9}}{0,2} \approx 13,5586501,$$

och motsvarande relativa fel är

$$\frac{|13,54517744 - 13,5586501|}{13,54517744} \approx 0,001 = 0,1\%.$$

Om $h = 10^{-2}$, så ger närmevärdet från a-fallet att relativa felet är

$$\frac{|13,54517744 - 13,54531215|}{13,54517744} \approx 0,00001 = 0,001\%.$$

c) Om $h = 10^{-13}$, så ger centraldifferensen

$$\frac{f(4+h) - f(4-h)}{2h} = \frac{(4+10^{-13})\sqrt{4+10^{-13}} - (4-10^{-13})\sqrt{4-10^{-13}}}{2 \cdot 10^{-13}}.$$

Beräknad med en TI-86-räknare är centraldifferensen 20. Olika räknare ger olika resultat. Orsaken är att täljaren är skillnaden av två nästan lika stora tal, vilket gör att räknaren kan ge värdet noll pga. minnesutrymme inte räcker till. (Räknaren kan inte ens skilja på talen $4+h$ och $4-h$ från varandra när h är tillräckligt litet. Du kan pröva detta genom att mata in värdena $4 \cdot 10^{-20}$ och $4 - 10^{-20}$ i räknaren).

Om räknaren ger värdet noll för centraldifferensen, så är absoluta felet

$$|T - L| = T = 8(1 + \ln 2)$$

och relativa felet 100 %.

Enligt definitionen på derivata närmar sig centraldifferensen derivatan när $h \rightarrow 0$, och absoluta felet närmar sig då noll. Centraldifferensen, beräknad med räknaren, närmar sig inte nödvändigtvis alltid derivatan eftersom räknarens kapacitet tar slut för mycket små värden på h .

Svar

a) $f'(4) \approx 13,5991816$, $f'(4) \approx 13,4914427$, $f'(4) \approx 13,54531215$

b) 0,1 %; 0,001 %

c) Beror på räknaren. Absoluta felet är troligtvis mycket stort.