Övningsprov 1

1. a)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + 3^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= \left(\frac{3}{1}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= 9 + 1 - \frac{1}{9}$$
$$= 10 - \frac{1}{9}$$
$$= \frac{89}{9} = 9\frac{8}{9}$$

b)

$$\frac{\left(2^k\right)^3 \cdot 2^{2-k}}{8}$$
$$= \frac{2^{3k} \cdot 2^{2-k}}{2^3}$$
$$= 2^{3k+2-k-3}$$
$$= 2^{2k-1}$$

c)

$$-3^2 - (-2)^3 - (-5)^2$$
$$= -9 - (-8) - 25$$
$$= -9 + 8 - 25$$
$$= -26$$

d)

$$2\sqrt{12} + \sqrt{75} - 3\left(1 + \sqrt{27}\right)$$
$$= 2\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} - 3 - 3\sqrt{27}$$
$$= 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{9 \cdot 3}$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3 - 3 \cdot 3\sqrt{3}$$
$$= -3$$

2.

a)

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6, & \text{när } 3x-6 \geq 0 \\ -(3x-6), & \text{när } 3x-6 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-6, & \text{när } 3x \geq 6 \\ -3x+6, & \text{när } 3x < 6 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-6, & \text{när } x \geq 2 \\ -3x+6, & \text{när } x < 2 \end{cases}$$

b)

$$|8-x| = 2$$

$$\begin{array}{lcl} 8-x=2 & \text{eller} & 8-x=-2 \\ -x=2-8 & \text{eller} & -x=-2-8 \\ -x=-6 & \text{eller} & -x=-10 \\ x=6 & \text{eller} & x=10 \end{array}$$

c)

Vi betecknar talet med bokstaven x
Perioden har tre siffror och då multiplicerar vi talet med tusen och subtraherar med talet självt:

$$1000x = 3123{,}123123\ldots$$

$$x = 3{,}123123\ldots$$

$$999x = 3120 \qquad |:999$$

$$x = {}^{3)}\frac{3120}{999}$$

$$x = \frac{1040}{333}$$

3.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{625}{5}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

b) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[3]{x^2y \cdot xy^2} = \sqrt[3]{x^3y^3} = \sqrt[3]{(xy)^3} = xy$

4. a)

$$x - \frac{x-1}{5} = \frac{x+1}{2} \qquad |\cdot 10$$

$$10x - 2(x-1) = 5(x+1)$$

$$10x - 2x + 2 = 5x + 5$$

$$8x - 5x = 5 - 2$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

b)

$$\sqrt{a^3} + \left(\sqrt{a}\right)^3 - \frac{\sqrt{4a^4}}{\sqrt{a}}$$

$$= \sqrt{a^3} + \sqrt{a^3} - \sqrt{\frac{4a^4}{a}}$$

$$= 2\sqrt{a^3} - \sqrt{4a^3}$$

$$= 2\sqrt{a^3} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^3}$$

$$= 2\sqrt{a^3} - 2\sqrt{a^3}$$

$$= 0$$

5. Vi betecknar antalet tvåpersonershytter med x och antalet fyrapersoners hytter med y. Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 485 \\ 2x + 4y = 1620 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} -2x - 2y = -970 \\ 2x + 4y = 1620 \end{cases}$$

$$2y = 650$$

$$y = 325$$

Svar: Det finns 325 fyrapersonershytter.

6. Eftersom variabeln y är direkt proportionell mot kvadratroten ur variabeln x så får vi

$$y = k\sqrt{x} \qquad | \; k \neq 0, \text{ konstant}$$

Genom att sätta in $x = 9$ och $y = 6$ får vi

$$6 = k \cdot \sqrt{9}$$

$$6 = 3k \qquad |:3$$

$$k = 2$$

Alltså

$$y = 2\sqrt{x}$$

a) Vi sätter in $x = 16$ i ekvationen $y = 2\sqrt{x}$:

$$y = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$

b) Variabeln y som funktion av variabeln x är

$$y = f(x) \qquad \text{dvs.}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x}$$

f är definierad för $x \geq 0$

Svar: a) $y = 8$ b) $y = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$

7. Vi betecknar den tid det tar att klippa gräsmattan med x och arbetsstyrkan med y. Vi gör en tabell:

tid x(h)	arbetsstyrka
12	y
x	$1{,}5y$

Tiden och arbetsstyrkan är omvänt proportionella. Vi får

$$\frac{12}{x}=\frac{1{,}5y}{y}$$

$$\frac{12}{x}=1{,}5 \qquad |\cdot x,\ x\neq 0$$

$$12=1{,}5x \qquad |:1{,}5$$

$$x=\frac{12}{1{,}5}$$

$$x=8(\text{h})$$

Svar: Det tar 8 timmar.

8. Affärsmannens inköpspris 2,30 (€/kg)
Mängden tomater a
Affärsmannen betalar $2{,}30a$

Mängden tomater efter att en del förstörts $a-\frac{1}{5}a=\frac{4}{5}a$

Försäljningspriset för tomaterna b

Affärsmannens intäkter $\frac{4}{5}ab$

Affärsmannens vinst $\frac{4}{5}ab-2{,}30a$

Vi kan också beteckna vinsten $0{,}1\cdot 2{,}30a$

Vi får ekvationen

$$\frac{4}{5}ab-2{,}30a=0{,}1\cdot 2{,}30a$$

$$\frac{4}{5}ab=0{,}1\cdot 2{,}30a+2{,}30a$$

$$\frac{4}{5}ab=1{,}1\cdot 2{,}30a \qquad |:a$$

$$\frac{4}{5}b=2{,}53 \qquad |\cdot\frac{5}{4}$$

$$b=\frac{5\cdot 2{,}53}{4}$$

$$b=3{,}1625$$

Svar: Försäljningspriset är 3,16 €.

9. Vi betecknar de elever som deltog i kursen med x.

$\frac{1}{6}x$ fick inte godkänt

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}x$ fick inte godkänt i omtagningen

Antalet elever som inte fick godkänt var 3. Vi får då ekvationen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}x=3$$
$$\frac{1}{12}x=3$$
$$x=36$$

Svar: Det gick 36 elever på kursen.

10.

$$ax-b=bx-a$$
$$ax-bx=b-a$$
$$(a-b)x=b-a$$

1) Om $a-b\neq 0$ dvs. $a\neq b$ kan vi dividera med $a-b$.

$$(a-b)x=b-a \qquad |:(a-b),\ a\neq b$$
$$x=\frac{b-a}{a-b}$$
$$x=\frac{-(a-b)}{a-b}$$
$$x=-1$$

Lösningen är $x=-1$, om $a\neq b$

2) Om $a-b=0$ dvs. $a=b$ kan den ursprungliga ekvationen skrivas

$$ax-a=ax-a$$
$$ax-ax=a-a$$
$$0=0 \quad \text{sant}$$

Alla värden på x uppfyller ekvationen om $a=b$.

Svar:

$$\begin{cases} x=-1 & ,\ \text{om } a\neq b \\ x\in \mathbb{R} & ,\ \text{om } a=b \end{cases}$$

Övningsprov 2

1. a)

$$\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{4}:\left(\frac{3}{2}-\frac{5\cdot\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}\cdot 3}\right)$$

$$=\frac{3}{4}:\left(^{3)}\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\right)$$

$$=\frac{3}{4}:\left(\frac{9-5}{6}\right)$$

$$=\frac{3}{4}:\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\frac{9}{8}$$

$$=1\frac{1}{8}$$

b)

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{4\cdot 2}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\left(-\sqrt{2}\right)^2$$

$$=2$$

c)

$$\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$$

$$=\frac{3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{6}}}$$

$$=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$$

$$=3^{\frac{4+3-1}{6}}$$

$$=3^{\frac{6}{6}}=3$$

2. a)

$$\left[(-5)^2-3^2\right]:2^2$$
$$=[25-9]:4$$
$$=16:4$$
$$=4$$

b)

$$2^{2^3}:\left(2^2\right)^3$$
$$=2^8:2^6$$
$$=2^{8-6}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

c)

$$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\left|1-\sqrt{2}\right| \qquad \left|1-\sqrt{2}<0\right.$$
$$=-\left(1-\sqrt{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

3. a)

$$\left[(-a)^2\right]^5+\left(-a^2\right)^5$$
$$=\left[a^2\right]^5+(-1)^5\left(a^2\right)^5$$
$$=a^{10}-1\cdot a^{10}$$
$$=0$$

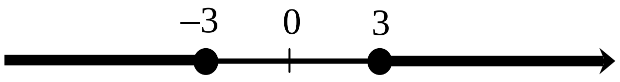
b)

$$^{\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}-{}^{\sqrt{2})}\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3-3\sqrt{3}}{3}-\frac{2-2\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\cancel{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}$$
$$=1-\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{2}\right)$$
$$=1-\sqrt{3}-1+\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

4.

a) $|x| \geq 3$

Avståndet mellan talet x och noll är 3 eller större

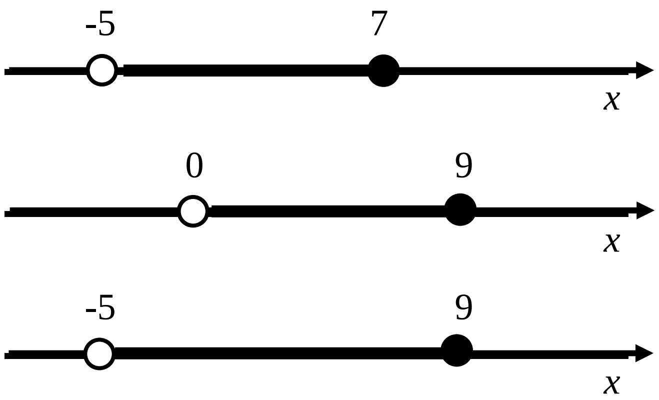


b) $-5 < x \leq 7$ eller $0 < x \leq 9$

I $-5 < x \leq 7$

II $0 < x \leq 9$

I eller II



5.

a) Ett ljusår är

$$300\,000\frac{\text{km}}{\text{s}}\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\text{ s}$$

$$= 9{,}4608\cdot 10^{12}\text{ km}$$

Vintergatans genomskärning är

$$9{,}8\cdot 10^{4}\cdot 9{,}4608\cdot 10^{12}\text{ km}$$

$$= 9{,}271584\cdot 10^{17}\text{ km}$$

$$= 9{,}3\cdot 10^{17}\text{ km} = 9{,}3\cdot 10^{20}\text{ m}$$

b)

$$\frac{2x+5}{3} - \frac{x-8}{6} = \frac{x+6}{2} \quad |\cdot 6$$

$$2(2x+5) - (x-8) = 3(x+6)$$

$$4x + 10 - x + 8 = 3x + 18$$

$$3x - 3x = 18 - 18$$

$$0 = 0 \qquad \text{sant}$$

Den ursprungliga ekvationen är ekvivalent med den alltid sanna ekvationen 0 = 0, och då är den ursprungliga ekvationen sann för alla $x \in \mathbb{R}$.

6.

Anta att det positiva talet är x.

Vi gör talet p % större. Det nya talet är då

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)x$$

Kvadratroten ur talet x är

först $\sqrt{x}$ sedan $\sqrt{\left(1+\frac{p}{100}\right)x}$

Kvadratroten ur det större talet är $1{,}1\sqrt{x}$.

Vi får då ekvationen

$$\sqrt{\left(1+\frac{p}{100}\right)x} = 1{,}1\sqrt{x}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{p}{100}\right)x} = \sqrt{1{,}1^2 x} \qquad | \text{ vi skriver radikanderna lika}$$

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)x = 1{,}1^2 x \qquad |: x,\ x>0$$

$$1+\frac{p}{100} = 1{,}1^2$$

$$\frac{p}{100} = 1{,}21-1 \qquad |\cdot 100$$

$$p = 21$$

Svar: Talet måste göras 21 % större.

7.

Anta att bullens massa är a
massan torrsubstans b

Fettet utgör 30 % av massan $0{,}3a$
och 40 % av torrsubstansen $0{,}4b$

Vi får ekvationen

$$0{,}3a = 0{,}4b \qquad |\cdot 10$$

$$3a = 4b \qquad |: 4$$

$$b = \frac{3}{4}a$$

Torrsubstansens andel av bullens massa i procent

$$\frac{b}{a}\cdot 100\ \% \qquad \left| b = \frac{3}{4}a\right.$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cancel{a}}{\cancel{a}}\cdot 100\ \%$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 100\ \%$$

$$= 75\ \%$$

Svar: Torrsubstansens andel av hela bullens massa är 75 %.

8.

Vi betecknar bromssträckan med s och hastigheten med v.
Eftersom bromssträckan s är direkt proportionell mot kvadraten på hastigheten v^2, får vi

$$s_1 = kv^2 \qquad | \; k \neq 0, \text{konstant}$$

Hastigheten ökar med 10 %, och den nya hastigheten är då 1,1v. Den nya bromssträckan är

$$\begin{aligned} s_2 &= k \cdot (1{,}1v)^2 \\ &= k \cdot 1{,}21v^2 \end{aligned}$$

Bromssträckan blir

$$\begin{aligned} &\frac{k \cdot 1{,}21v^2 - kv^2}{kv^2} \cdot 100\ \% \\ &= \frac{kv^2(1{,}21-1)}{kv^2} \cdot 100\ \% \\ &= 21\ \%\ \text{längre} \end{aligned}$$

Svar: Bromssträckan blir 21 % längre.

9.

Mängden utsläpp u.

a) Man når inte målet om man minskar utsläppen med 10 % per år. Vi räknar hur mycket utsläppen minskar.

Efter första året	$0{,}9u$
Efter andra året	$0{,}9^2u = 0{,}81u$
Efter tredje året	$0{,}9^3u = 0{,}729u$

Utsläppen minskar med

$$(1-0{,}729) \cdot 100\ \% = 27{,}1\ \%$$

b) Vi löser x i ekvationen

$$\begin{aligned} x^3 p &= 0{,}7p \\ x^3 &= 0{,}7 \\ x &= \sqrt[3]{0{,}7} \\ x &= 0{,}8879... \end{aligned}$$

Man borde årligen minska utsläppen med

$$(1-0{,}8879...) \cdot 100\ \% = 11.209...\ \% \approx 11{,}2\ \%$$

Svar: a) Nej, 27,1 % b) 11,2 %

10.

$$\frac{2x+a^2-3a}{x-1}=a \qquad \left| \begin{array}{l} x \neq 1 \\ \cdot(x-1)\ (\neq 0) \end{array} \right.$$

$$2x+a^2-3a=a(x-1)$$

$$2x+a^2-3a=ax-a$$

$$2x-ax=-a^2+2a$$

$$x(2-a)=-a^2+2a$$

1) Om $2-a \neq 0$ dvs. $a \neq 2$, kan vi dividera ekvationen med $2-a$.

$$x(2-a)=-a^2+2a \qquad \left| :(2-a)\ (\neq 0) \right.$$

$$x=\frac{-a^2+2a}{2-a}$$

$$x=\frac{a(-a+2)}{2-a}=\frac{a(a-2)}{a-2}$$

$$x=a, \text{ när } a \neq 2 \qquad \left| x \neq 1 \right.$$

$$x=a, \text{ när } a \neq 1,\ a \neq 2$$

2) Om $2-a=0$ dvs. $a=2$, får den ursprungliga ekvationen formen

$$\frac{2x+2^2-3\cdot 2}{x-1}=a$$

$$\frac{2x-2}{x-1}=2$$

$$\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

$$2=2 \qquad \text{sant}$$

Ekvationen uppfylls av alla reella tal $x \neq 1$, när $a=2$

Svar

$$\begin{cases} x=a, & \text{när a} \neq 1, a \neq 2 \\ x \in \mathbb{R}, x \neq 1, & \text{när } a=2 \\ \text{lösning saknas,} & \text{när } a=1 \end{cases}$$

Övningsprov 3

1.

a)

$$3\frac{1}{8}-2\frac{3}{4}+4\frac{1}{2}$$
$$=3+\frac{1}{8}-2-\frac{3}{4}+4+\frac{1}{2}$$
$$=3-2+4+\frac{1}{8}-{}^{2)}\frac{3}{4}+{}^{4)}\frac{1}{2}$$
$$=5+\frac{1}{8}-\frac{6}{8}+\frac{4}{8}$$
$$=5+\frac{1-6+4}{8}$$
$$={}^{8)}5-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{40}{8}-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{39}{8}$$
$$=4\frac{7}{8}$$

b)

$$\frac{3}{4}\left(5\frac{1}{3}-2\frac{1}{5}\right):\frac{7}{9}$$
$$=\frac{3}{4}\left({}^{5)}\frac{16}{3}-{}^{3)}\frac{11}{5}\right):\frac{7}{9}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{80-33}{15}\right):\frac{7}{9}$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{47}{15}:\frac{7}{9}$$
$$=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot 47}{4\cdot\underset{5}{\cancel{15}}}:\frac{7}{9}$$
$$=\frac{47}{20}\cdot\frac{9}{7}$$
$$=\frac{47\cdot 9}{20\cdot 7}$$
$$=\frac{423}{140}=3\frac{3}{140}$$

c)

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}$$
$$=\left|\sqrt{5}-2\right|$$
$$=\left|\sqrt{5}-\sqrt{4}\right| \qquad \left|\sqrt{5}-\sqrt{4}>0\right.$$
$$=\sqrt{5}-2$$

2.

a) De inverterade talen till talen $\frac{5}{21}$ och -5 är $\frac{21}{5}$ och $-\frac{1}{5}$.

Summan av dessa tal är

$$\frac{21}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{21}{5}-\frac{1}{5}$$
$$=\frac{20}{5}=4$$

och summans motsatta tal är -4.

b)

$$\left(\frac{1}{7}\right)^0-\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}-(-2)^3$$
$$=1-\left(\frac{7}{2}\right)^1-(-8)$$
$$=1-\frac{7}{2}+8$$
$$=9-3\frac{1}{2}$$
$$=5\frac{1}{2}$$

3.

a)

$$2^{2004}\cdot 0{,}5^{2005}$$
$$=2^{2004}\cdot 0{,}5^{2004}\cdot 0{,}5$$
$$=(2\cdot 0{,}5)^{2004}\cdot 0{,}5$$
$$=1^{2004}\cdot 0{,}5$$
$$=0{,}5$$

b)

$$(-1)^{2n+1}\cdot a^{2n}\cdot a^n \qquad |\,a>0,\ n\in \mathbb{Z}$$
$$=-1\cdot a^{2n+n}$$
$$=-a^{3n}$$

c)

$$\frac{x^{2n+1}\cdot x^{3-n}}{x^{n-2}} \qquad |\,x>0$$
$$=x^{2n+1+3-n-(n-2)}$$
$$=x^{2n+1+3-n-n+2}$$
$$=x^6$$

4.

Vi betecknar budgeten med bokstaven a.

Budgeten skall skäras ned med 35 % på fem år genom procentuellt lika stora nedskärningar årligen.

Vi betecknar den årliga nedskärningsfaktorn med k. Då kommer budgeten att k-faldigas på ett år Vi får ekvationen

$$
\begin{aligned}
k^5 \cdot a &= \frac{100-35}{100}a \qquad |: a\ (\neq 0)\\
k^5 &= \frac{65}{100}\\
k^5 &= 0{,}65\\
k &= \sqrt[5]{0{,}65}\\
k &= 0{,}91745...\\
k &\approx 0{,}917
\end{aligned}
$$

Budgeten bör minskas med en faktor 0,917 per år, dvs. den bör vara 91,7 % av föregående års budget. Man bör alltså skära ned 100 % – 91,7 %= 8,3 %.

Svar: Budgeten bör minskas med 8,3 %.

5.

a) Nej, vi har t.ex. $0 \cdot \pi = 0$.

b)

$$
\begin{aligned}
2(x+1)^3 - 32 &= 0\\
2(x+1)^3 &= 32 \qquad |: 2\\
(x+1)^3 &= 16\\
x+1 &= \sqrt[3]{16}\\
x &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} - 1\\
x &= 2\sqrt[3]{2} - 1
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
2(x-1)^4 &= 64 \qquad |: 2\\
(x-1)^4 &= 32\\
x-1 &= \pm\sqrt[4]{32}\\
x &= 1 \pm \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{2}\\
x &= 1 \pm 2\sqrt[4]{2}
\end{aligned}
$$

6.

$$3x-\frac{5-2x}{2}=4x+1 \qquad |\cdot 2$$
$$6x-(5-2x)=8x+2$$
$$6x-5+2x=8x+2$$
$$8x-8x=2+5$$
$$0=7 \qquad \text{falskt}$$

Den ursprungliga ekvationen är ekvivalent med den alltid falska ekvationen 0 = 7. Den ursprungliga ekvationen saknar då lösning.

7.

Massan citronmeliss	a
mängden vatten	$0{,}7a$
mineralämnen	$0{,}06a$
övrigt	$0{,}24a$
Efter torkningen	
massa	b
vattenmängd	$0{,}1b$
mineralämnen	$0{,}06a$
övrigt	$0{,}9b$

Mängden mineralämnen och övrigt ändras inte

$$0{,}06a+0{,}24a=0{,}9b$$
$$0{,}3a=0{,}9b \qquad |\cdot 10$$
$$3a=9b \qquad |:3$$
$$a=3b$$

Halten mineralämne i torkad citronmeliss

$$\frac{0{,}06a}{b}\cdot 100\% \qquad |a=3b$$
$$=\frac{0{,}06\cdot 3\cancel{b}}{\cancel{b}}\cdot 100\%$$
$$=18\%$$

Svar: Halten citronmeliss är 18 %.

8.

Anta att tiden är t (h) och medelhastigheten v ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Före	
tid	1,5
medelhastighet	v
Senare	
tid	t
medelhastighet	$1{,}25v$

Eftersom sträckan kan beräknas med $s = vt$ och sträckan inte ändras får vi ekvationen

$$1{,}5v = 1{,}25v \cdot t \qquad |: v,\ v \neq 0$$

$$1{,}5 = 1{,}25t \qquad |: 1{,}25$$

$$t = \frac{1{,}5}{1{,}25}$$

$$t = 1{,}2 \text{ (h)}$$

Tiden är alltså $1{,}2 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0{,}2 \cdot 60 \text{ min} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$

Svar: Körtiden är 1 h 12 min.

9.

a) **Bevis.** Beteckna $a = 10 - 6\sqrt{3}$ och $b = 1 - \sqrt{3}$.

Vår uppgift är att visa att $\sqrt[3]{a} = b$ dvs. $b^3 = a$.

(Eftersom kubikroten är en udda rot räcker det att kontrollera ett villkor.)

Eftersom

$$\begin{aligned}
b^3 &= \left(1-\sqrt{3}\right)^3 = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) \\
&= \left[1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]\left(1-\sqrt{3}\right) \\
&= \left(1-2\sqrt{3}+3\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = \left(4-2\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) \\
&= 4-4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-6\sqrt{3}+2\cdot 3 \\
&= 10-6\sqrt{3}
\end{aligned}$$

så är $b^3 = a$.

b)

$$\sqrt{30-12\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{30-12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Bevis. Beteckna $a = 30 - 12\sqrt{6}$ och $b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

Vår uppgift är att visa att $\sqrt{a} = b$ dvs. att $b \geq 0$ och $b^2 = a$.

Eftersom

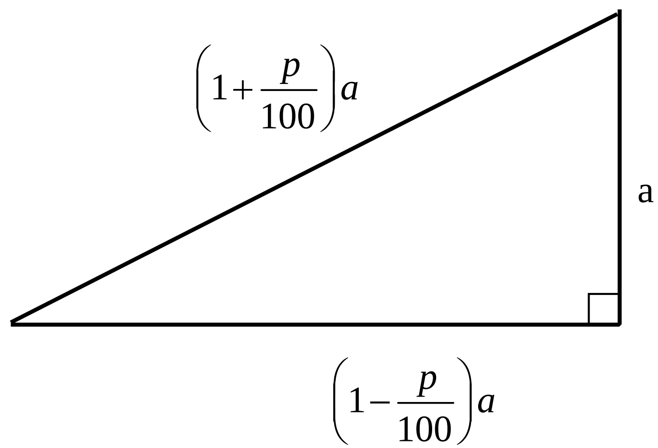
$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{18} - \sqrt{12} > 0,$$

är $b \geq 0$.

Eftersom

$$\begin{aligned}
b^2 &= \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^2 = \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) \\
&= \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \\
&= 9 \cdot 2 - 2 \cdot 6\sqrt{6} + 4 \cdot 3 \\
&= 18 - 12\sqrt{6} + 12 \\
&= 30 - 12\sqrt{6}
\end{aligned}$$

gäller villkoret $b^2 = a$.



Figur till uppg 10.

10.

En sida en den rätvinkliga triangeln är a.
Eftersom den längsta sidan är p% kortare än a, är hypotenusan

$$a + \frac{p}{100}a = \left(1 + \frac{p}{100}\right)a$$

Den andra kateten är

$$a - \frac{p}{100}a = \left(1 - \frac{p}{100}\right)a$$

Pythagoras sats ger

$$a^2 + \left[\left(1 - \frac{p}{100}\right)a\right]^2 = \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)a\right]^2$$

$$a^2 + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 a^2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 a^2 \qquad \Big|: a^2,\ a^2 \neq 0$$

$$1 + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$\cancel{1} + 1 - \frac{2p}{100} + \cancel{\frac{p^2}{10\,000}} = \cancel{1} + \frac{2p}{100} + \cancel{\frac{p^2}{10\,000}}$$

$$\frac{4p}{100} = 1$$

$$4p = 100 \qquad \Big|: 4$$

$$p = 25$$

Arean är

$$A = \frac{ah}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} a = a \\ h = \left(1 - \frac{p}{100}\right)a = \frac{3}{4}a \end{array} \right.$$

$$= \frac{a \cdot \frac{3}{4}a}{2}$$

$$= \frac{3}{8}a^2$$

Svar: $p = 25$ och arean är $\frac{3}{8}a^2$