

Prov 1

1

$$\text{a) } 5x - 2(x+1) + 15 \leq 8(x+1) - 5(2x-1) \quad | \text{ vi förenklar}$$

$$5x - 2x - 2 + 15 \leq 8x + 8 - 10x + 5$$

$$5x - 2x - 8x + 10x \leq 8 + 5 + 2 - 15$$

$$5x \leq 0$$

| : 5 (> 0)
Olikhetstecknets riktning består.

$$x \leq 0$$

$$\text{b) } (x+5)^2 < 2x(x+5) - (x+6)(x-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) \\ = a^2 - b^2 \end{array} \right.$$

$$x^2 + 10x + 25 < 2x^2 + 10x - (x^2 - 6^2)$$

$$x^2 + 10x + 25 < 2x^2 + 10x - x^2 + 36$$

$$x^2 + 10x - 2x^2 - 10x + x^2 < 36 - 25$$

$$0 < 11 \quad \text{alltid sann}$$

Den ursprungliga ekvationen är ekvivalent med en ekvation som alltid är sann. Då är den ursprungliga ekvationen sann för alla x , dvs. för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar a) $x \leq 0$ b) $x \in \mathbb{R}$

2

$$\begin{aligned} \text{a) } 18x^2 - 8 & \quad | \text{ gemensam faktor} \\ & = 2(9x^2 - 4) \quad | \text{ minnesregel} \\ & = 2[(3x)^2 - 2^2] \quad | a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ & = 2(3x+2)(3x-2) \end{aligned}$$

b) Vi bestämmer först polynomets nollställen.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{array} \right.$$

Dvs.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 & \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \\ a = 1, x_1 = 3, x_2 = -2 \end{array} \right. \\ & = 1 \cdot (x-3)[x - (-2)] \\ & = (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } x^3 - 2x^2 + x - 2 & \quad | \text{ gruppering} \\
 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) & \quad | \text{ gemensam faktor} \\
 = x^2(x - 2) + 1(x - 2) & \\
 = (x - 2)(x^2 + 1) & \quad | x^2 + 1 > 0 \text{ alltid.} \\
 & \quad | \text{Dvs. } x^2 + 1 \text{ kan inte faktoriseras.} \\
 = (x - 2)(x^2 + 1) &
 \end{aligned}$$

Svar

a) $2(3x + 2)(3x - 2)$
 b) $(x - 3)(x + 2)$ c) $(x - 2)(x^2 + 1)$

3

$$P(x) = 2x - 3$$

$$Q(x) = 6 - x$$

$$\begin{aligned}
 [P(x)]^2 + 2xQ(x) - 9 & \\
 = (2x - 3)^2 + 2x(6 - x) - 9 & \quad | (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
 = 4x^2 - \cancel{12x} + \cancel{9} + \cancel{12x} - 2x^2 - \cancel{9} & \\
 = 2x^2 &
 \end{aligned}$$

När $x = -\frac{5}{4}$, så är uttryckets värde

$$2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = 2 \cdot \frac{25}{16} = \frac{\cancel{2} \cdot 25}{\cancel{16}_8} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

Svar Uttrycket är $2x^2$ och uttryckets värde för $x = -\frac{5}{4}$ är $3\frac{1}{8}$.

4

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} & \quad | \text{ Vi förlänger med nämnarens konjugatuttryck} \\
 = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} - \frac{3(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} & \\
 = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2-1} & \\
 = \sqrt{2} - 3(\sqrt{2}-1) & \\
 = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3 & \\
 = 3 - 2\sqrt{2} & \\
 \text{b) } (2\sqrt{5} + 5\sqrt{2})(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}) & \quad | (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \\
 = (2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2 & \\
 = 4 \cdot 5 - 25 \cdot 2 & \\
 = 20 - 50 & \\
 = -30 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 1 - \frac{\sqrt{3+1} \cdot 1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} & \\
 = 1 - \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} & \\
 = 1 - \frac{1+2\sqrt{3}+3}{3-1} & \\
 = 1 - \frac{2\sqrt{3}+4}{2} & \\
 = 1 - \frac{\cancel{2}(\sqrt{3}+2)}{\cancel{2}} & \\
 = 1 - (\sqrt{3}+2) & \\
 = 1 - \sqrt{3} - 2 & \\
 = -\sqrt{3} - 1 &
 \end{aligned}$$

| Vi förlänger med nämnarens konjugatuttryck

Svar a) $3 - 2\sqrt{2}$ b) -30 c) $-\sqrt{3} - 1$

5

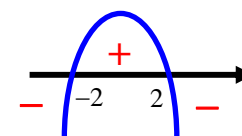
$$\frac{\sqrt{x+1}}{x} + \sqrt{4-x^2}$$

Uttrycket är definierat när

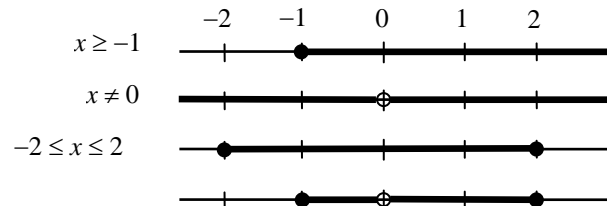
$$x+1 \geq 0 \quad \text{och} \quad x \neq 0 \quad \text{och} \quad 4-x^2 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$



$$-2 \leq x \leq 2$$



Uttrycket är *inte* definierat när $x < -1$ eller $x = 0$ eller $x > 2$.

Svar $x < -1$ eller $x = 0$ eller $x > 2$

6

a) $x(x-1) = -3(x-1)$

$x^2 - x = -3x + 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$x = 1 \text{ eller } x = -3$

Alternativ 2

$x(x-1) = -3(x-1)$

$x(x-1) + 3(x-1) = 0$ | gemensam faktor

$(x-1)(x+3) = 0$ | nollregeln för en produkt

$x-1 = 0 \text{ eller } x+3 = 0$

$x = 1 \text{ eller } x = -3$

b) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

$(x^2)^2 - 7x^2 - 18 = 0$ | Insättning $t = x^2$.

$t^2 - 7t - 18 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{7 \pm 11}{2}$$

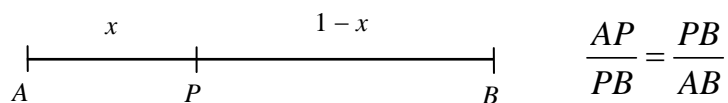
$t = 9 \text{ eller } t = -2$ | $t = x^2$

$x^2 = 9 \text{ eller } \underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-2}_{< 0} \text{ alltid falsk}$

$x = \pm 3$ ingen lösning

Svar a) $x = 1$ eller $x = -3$ b) $x = \pm 3$

7



Vi betecknar längden av sträckan AP med bokstaven x ($0 < x < 1$). Vi får förhållandet

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} \quad \left| \begin{array}{l} x \neq 1 \\ \cdot (1-x) \quad (\neq 0) \end{array} \right.$$

$$x = (1-x)(1-x)$$

$$x = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} (\approx 2,62) \quad \text{eller} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (\approx 0,38)$$

Duger inte

eftersom $x < 1$.

Svar

Längden av sträckan AP är $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38$.

8

- a) Ekvationen $x^2 + kx + k + 3 = 0$ är av andra grad för alla värden på konstanten k . Ekvationen saknar reella rötter om diskriminanten $D < 0$.

$$D < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad | \quad a = 1, b = k, c = k + 3$$

$$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 3) < 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

Vi bestämmer nollställena för uttryckets vänstra led:

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$k = \frac{4 \pm 8}{2}$$

$$k = -2 \quad \text{eller} \quad k = 6$$

Vi skissar grafen till funktionen $k^2 - 4k - 12$:



$$-2 < k < 6$$

- b) Polynomet $x^2 - 5x + g$ har en faktor $x + 3$ om och endast om nollstället -3 till binomet $x + 3$ också är nollställe till polynomet $x^2 - 5x + g$. Vi får ekvationen

$$\begin{aligned}(-3)^2 - 5 \cdot (-3) + g &= 0 \\ 9 + 15 + g &= 0 \\ g &= -24\end{aligned}$$

Polynomet $x^2 - 5x - 24$ kan inte faktoriseras med hjälp av gemensamma faktorer eller minnesregler. Vi faktorerar polynomet med hjälp av nollställena.

Polynomets nollställena:

$$\begin{aligned}x^2 - 5x - 24 &= 0 \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{5 \pm 11}{2} \\ x &= -3 \quad \text{eller} \quad x = 8\end{aligned}$$

Eftersom polynomet har nollställena $x = -3$ och $x = 8$, så har det faktorerna $x + 3$ och $x - 8$. Dvs. $x - 8$ är polynomets andra faktor.

Svar a) $-2 < k < 6$ b) $g = -24, x - 8$

9

Eftersom polynomet $P(x)$ har ett nollställe $x = 1$, har det en faktor $x - 1$.

Eftersom polynomet $P(x)$ har ett dubbelt nollställe $x = -1$, har det också faktorn $(x + 1)(x + 1)$.

Dvs. polynomet har formen $P(x) = a(x - 1)(x + 1)(x + 1) = a(x - 1)(x + 1)^2$. Eftersom $P(2) = 3$, får vi ekvationen

$$a(2 - 1)(2 + 1)^2 = 3$$

$$a \cdot 1 \cdot 3^2 = 3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Dvs. $P(x) = \frac{1}{3}(x - 1)(x + 1)^2$.

Då är

$$\begin{aligned}P(0) - P(-2) &= \frac{1}{3}(0 - 1)(0 + 1)^2 - \frac{1}{3}(-2 - 1)(-2 + 1)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Svar $P(0) - P(-2) = \frac{2}{3}$

10

Uttrycket $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2ax + a}$ kan förenklas när nämnaren och täljaren

har en gemensam, åtminstone första gradens, faktor. I detta fall kan de gemensamma faktorerna vara första eller andra gradens. Vi undersöker först om det finns några första gradens faktorer. Nämnaren och täljaren har en gemensam första gradens faktor om och endast om de har ett gemensamt nollställe. Eftersom vi har en parameter a i nämnaren, bestämmer vi först täljarens nollställen.

Täljarens nollställen:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{eller} \quad x = 2$$

1) Vi undersöker för vilka värden på parametern a som $x = 4$ också är ett nollställe för nämnaren.

$$4^2 + 2a \cdot 4 + a = 0$$

$$16 + 8a + a = 0$$

$$9a = -16$$

$$a = -\frac{16}{9}$$

För värdet $a = -\frac{16}{9}$ får det ursprungliga uttrycket formen

$$9) \quad \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - \frac{32}{9}x - \frac{16}{9}}$$

$$= \frac{9 \cdot 1 \cdot (x - 4)(x - 2)}{9x^2 - 32x - 16}$$

$$= \frac{9(x - 4)(x - 2)}{9(x - 4)\left(x + \frac{4}{9}\right)}$$

$$= \frac{9x - 18}{9x + 4}, \quad x \neq 4, \quad x \neq -\frac{4}{9}$$

Täljarens nollställen:
 $x = 4$ och $x = 2$

Nämnarens nollställen:

$$9x^2 - 32x - 16 = 0$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16)}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{32 \pm 40}{18}$$

$$x = 4 \quad \text{eller} \quad x = -\frac{4}{9}$$

2) Vi undersöker för vilka värden på parametern a som $x = 2$ också är ett nollställe för nämnaren.

$$2^2 + 2a \cdot 2 + a = 0$$

$$5a = -4$$

$$a = -\frac{4}{5}$$

För värdet $a = -\frac{4}{5}$ får det ursprungliga uttrycket formen

$$\begin{aligned} & 5) \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{5 \cdot 1 \cdot (x-4)(x-2)}{5x^2 - 8x - 4} \\ &= \frac{5(x-4)(x-2)}{5(x-2)\left(x + \frac{2}{5}\right)} \\ &= \frac{5x-20}{5x+2}, \quad x \neq 2, x \neq -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Täljarens nollställen:
 $x = 4$ och $x = 2$

Nämnarens nollställen:
 $5x^2 - 8x - 4 = 0$
 $x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5}$
 $x = \frac{8 \pm 12}{10}$
 $x = 2$ eller $x = -\frac{2}{5}$

Täljaren och nämnaren har inga gemensamma andra gradens faktorer för något värde på parametern a , eftersom det inte existerar något värde där båda täljarens nollställen, $x = 4$ och $x = 2$, samtidigt är nollställen för nämnaren.

Svar

$$a = -\frac{16}{9}; \frac{9x-18}{9x+4}, x \neq 4, x \neq -\frac{4}{9}$$

$$a = -\frac{4}{5}; \frac{5x-20}{5x+2}, x \neq 2, x \neq -\frac{2}{5}$$

Prov 2

1

a) $7x^2 = 49x$

$$7x^2 - 49x = 0$$

$$7x(x-7) = 0$$

$$7x = 0 \text{ eller } x - 7 = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = 7$$

b) $18x^2 = 2$

$$x^2 = \frac{2}{18}$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$x = \pm \frac{1}{3}$$

c) $4x - 1 = x^2$

$$-x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2}$$

$$|\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Svar a) $x = 0$ eller $x = 7$ b) $x = \pm \frac{1}{3}$ c) $x = 2 \pm \sqrt{3}$

2

$$\text{a) } \frac{1}{2}(x-1) - \frac{x-2}{5} \leq \frac{3x}{10} \quad \left| \cdot 10 \right.$$

Olikhetstecknets riktning består.

$$10 \cdot \frac{1}{2}(x-1) - 10 \cdot \frac{x-2}{5} \leq 10 \cdot \frac{3x}{10}$$

$$5(x-1) - 2(x-2) \leq 3x$$

$$5x - 5 - 2x + 4 \leq 3x$$

$$3x - 1 \leq 3x$$

$$3x - 3x \leq 1$$

$$0 \leq 1 \quad \text{alltid sann}$$

Den ursprungliga olikheten är ekvivalent med en olikhet som alltid är sann. Då är den ursprungliga olikheten sann för alla värden på x , dvs. för alla $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{b) } x+1 < x\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$x - x\sqrt{2} < \sqrt{2} - 1$$

$$x(1 - \sqrt{2}) < \sqrt{2} - 1$$

$$\left| : (1 - \sqrt{2}) \quad (< 0) \right.$$

Olikhetstecknet byter riktning.

$$x > \frac{\sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2}}$$

$$\left| a - b = -(b - a) \right.$$

$$x > \frac{-\cancel{(1 - \sqrt{2})}}{\cancel{1 - \sqrt{2}}}$$

$$x > -1$$

Svar a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x > -1$

3

$$\text{a) } 3x^2 + 5x \geq 2$$

$$3x^2 + 5x - 2 \geq 0$$

Vi bestämmer nollställena för uttryckets vänstra led:

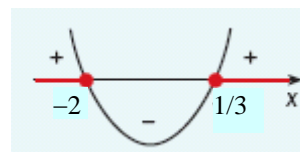
$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = \frac{1}{3}$$

Vi skissar grafen till funktionen $3x^2 + 5x - 2$:



$$x \leq -2 \quad \text{eller} \quad x \geq 1/3$$

$$\text{b) } 5x^6 + 320 = 0$$

$$\underbrace{5x^6}_{\geq 0} = \underbrace{-320}_{< 0} \quad \text{alltid falsk}$$

ingen lösning

Svar a) $x \leq -2$ eller $x \geq \frac{1}{3}$ b) lösning saknas

4

Nollställena till polynomet $Q(x) = 2x^2 - 18$ är

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Polynomet $P(x) = ax^2 + x + 8$ har nollstället $x = -3$ när

$$a \cdot (-3)^2 - 3 + 8 = 0$$

$$9a + 5 = 0$$

$$9a = -5$$

$$a = -\frac{5}{9}$$

Polynomet $P(x) = ax^2 + x + 8$ har nollstället $x = 3$ när

$$a \cdot 3^2 + 3 + 8 = 0$$

$$9a + 11 = 0$$

$$9a = -11$$

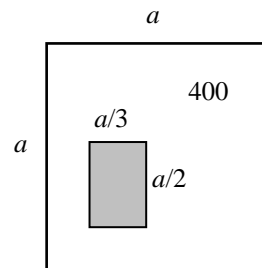
$$a = -\frac{11}{9}$$

$$a = -1\frac{2}{9}$$

Svar $a = -1\frac{2}{9}$ eller $a = -\frac{5}{9}$

5

Vi betecknar tomtens sida med bokstaven a (m).



Eftersom husets och gårdens sammanlagda area är samma som tomtens area a^2 får vi ekvationen

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} + 400 = a^2$$

$$a^2 - \frac{1}{6}a^2 = 400$$

$$\frac{5}{6}a^2 = 400 \quad | \cdot \frac{6}{5}$$

$$a^2 = 480 \text{ (m}^2\text{)}$$

Svar Tomtens area är 480 m^2 .

6

$$tx^2 + tx + t = 3$$

$$tx^2 + tx + t - 3 = 0$$

- 1) När $t \neq 0$ är ekvationen en andra gradens ekvation och den har då exakt en reell rot om diskriminanten $D = 0$.

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad | \quad a = t, b = t, c = t - 3$$

$$t^2 - 4 \cdot t \cdot (t - 3) = 0$$

$$t^2 - 4t^2 + 12t = 0$$

$$-3t^2 + 12t = 0$$

$$-3t(t - 4) = 0$$

$$-3t = 0 \quad \text{eller} \quad t - 4 = 0$$

$$\underbrace{t = 0}_{\text{duger inte}} \quad \text{eller} \quad t = 4 \quad | \quad t \neq 0$$

- 2) När $t = 0$ får ekvationen formen

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 - 3 = 0$$

$$-3 = 0 \quad \text{alltid falsk}$$

ingen lösning

När $t = 4$ får den ursprungliga ekvationen formen

$$4x^2 + 4x + 4 = 3$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Svar $t = 4, x = -\frac{1}{2}$

7

Polynomet $2x^2 - 5x + a$ är delbart med första gradens binomet $x + 2$ om det har samma nollställe som binomet $x + 2$.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Vi får ekvationen

$$2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + a = 0$$

$$8 + 10 + a = 0$$

$$a = -18$$

Svar $a = -18$

8

a) $ax + 4 = 2x + a^2$

$ax - 2x = a^2 - 4$

$x(a - 2) = a^2 - 4$

1) När $a - 2 \neq 0$, dvs. när $a \neq 2$, är ekvationen delbar med talet $a - 2$.

$$x(a - 2) = a^2 - 4 \quad | : (a - 2) (\neq 0)$$

$$x = \frac{a^2 - 4}{a - 2} \quad | a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x = \frac{(a + 2)(a - 2)}{a - 2}$$

$$x = a + 2, \quad a \neq 2$$

2) När $a - 2 = 0$, dvs. när $a = 2$, får den ursprungliga ekvationen formen

$$2x + 4 = 2x + 2^2$$

$$0 = 0 \quad \text{alltid sann}$$

Dvs. ekvationen är uppfylld för alla värden $x \in \mathbb{R}$ när $a = 2$.

Svar
$$\begin{cases} x = a + 2, & \text{när } a \neq 2 \\ x \in \mathbb{R}, & \text{när } a = 2 \end{cases}$$

b) $ax + 4 > 2x + a^2$

$ax - 2x > a^2 - 4$

$x(a - 2) > a^2 - 4$

1) När $a - 2 > 0$, dvs. när $a > 2$, kan olikheten delas med det positiva talet $a - 2$. Olikhetstecknets riktning bibehålls.

$$x(a - 2) > a^2 - 4 \quad | : (a - 2) (> 0)$$

$$x > \frac{a^2 - 4}{a - 2} \quad | a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x > \frac{(a + 2)(a - 2)}{a - 2}$$

$$x > a + 2, \quad a > 2$$

2) När $a - 2 < 0$, dvs. när $a < 2$, kan olikheten delas med det negativa talet $a - 2$. Olikhetstecknet byter riktning.

$$x(a - 2) > a^2 - 4 \quad | : (a - 2) (< 0)$$

$$x < \frac{a^2 - 4}{a - 2} \quad | a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x < \frac{(a + 2)(a - 2)}{a - 2}$$

$$x < a + 2, \quad a < 2$$

3) När $a - 2 = 0$, dvs. när $a = 2$, får den ursprungliga ekvationen formen

$$2x + 4 > 2x + 2^2$$

$$0 > 0 \quad \text{alltid falsk}$$

Dvs. olikheten saknar lösning om $a = 2$.

$$\text{Svar} \quad \begin{cases} x > a + 2, & \text{när } a > 2 \\ x < a + 2, & \text{när } a < 2 \\ \text{lösning saknas,} & \text{när } a = 2 \end{cases}$$

9

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{a+3}{a^2-1} - \frac{a+1}{a^2-a} \quad \left| \begin{array}{l} a^2-1 \neq 0 \quad \text{och} \quad a^2-a \neq 0 \\ a^2 \neq 1 \quad \text{och} \quad a(a-1) \neq 0 \\ a \neq \pm 1 \quad \text{och} \quad a \neq 0 \end{array} \right. \\ &= \frac{a^a}{(a+1)(a-1)} - \frac{a^{a+1}}{a(a-1)} \\ &= \frac{a(a+3) - (a+1)^2}{a(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{a^2 + 3a - (a^2 + 2a + 1)}{a(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{a-1}{a(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{1}{a^2+a}, \quad a \neq \pm 1, a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{x^2+2x}{2-x} : \frac{x}{x^2-4x+4} \quad \left| \begin{array}{l} x \neq 2, x \neq 0, x^2-4x+4 \neq 0 \\ (x-2)^2 \neq 0 \\ x \neq 2 \end{array} \right. \\ &= \frac{x(x+2)}{2-x} : \frac{x}{(x-2)^2} \quad \left| \begin{array}{l} a-b = -(b-a) \\ a:b = a \cdot \frac{1}{b} \end{array} \right. \\ &= \frac{x(x+2)}{-(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{-1} = \frac{x^2-4}{-1} \\ &= -x^2+4, \quad x \neq 2, x \neq 0 \end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{3} < \frac{1-3x}{x-2} \quad | \quad x \neq 2 \\ & \frac{x-2}{3} \cdot \frac{2x}{3} - \frac{3}{3} \cdot \frac{1-3x}{x-2} < 0 \\ & \frac{2x(x-2)}{3(x-2)} - \frac{3(1-3x)}{3(x-2)} < 0 \\ & \frac{2x(x-2) - 3(1-3x)}{3(x-2)} < 0 \\ & \frac{2x^2 - 4x - 3 + 9x}{3(x-2)} < 0 \\ & \frac{2x^2 + 5x - 3}{3(x-2)} < 0 \end{aligned}$$

Täljarens nollställen:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = -3$$

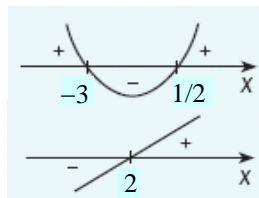
Nämnares nollställen:

$$3(x-2) = 0$$

$$x = 2$$

Teckenschema:

$2x^2 + 5x - 3$	+	-	+	+
$3(x-2)$	-	-	-	+
kvot	-	+	-	+
	-3	1/2	2	



Svar $x < -3$ eller $\frac{1}{2} < x < 2$

Prov 3

1

a) $(2a+1)^2 - (1-2a)^2 - (1-2a)(1+2a)$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$= 4a^2 + 4a + 1 - (1 - 4a + 4a^2) - (1 - 4a^2)$$

$$= 4a^2 + 4a + \cancel{1} - \cancel{1} + 4a - \cancel{4a^2} - 1 + \cancel{4a^2}$$

$$= 4a^2 + 8a - 1$$

b) $\frac{2x-2}{x^2-x}$

$$\begin{aligned} x^2 - x &\neq 0 \\ x(x-1) &\neq 0 \\ x &\neq 0 \quad \text{och} \quad x \neq 1 \\ \text{Faktorisering.} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{2}{x}, \quad \text{när } x \neq 0, x \neq 1$$

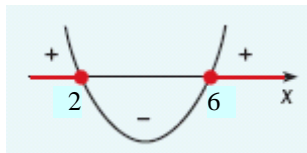
Svar a) $4a^2 + 8a - 1$ b) $\frac{2}{x}$, när $x \neq 0, x \neq 1$

2

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2) &< 2(x-2)^2 \\ x^2 - 4 &< 2(x^2 - 4x + 4) \\ x^2 - 4 &< 2x^2 - 8x + 8 \\ -x^2 + 8x - 12 &< 0 && | \cdot (-1) \\ x^2 - 8x + 12 &> 0\end{aligned}$$

Vi bestämmer nollställena för uttryckets vänstra led.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{8 \pm 4}{2} \\ x &= 2 \quad \text{eller} \quad x = 6\end{aligned}$$

Vi skissar grafen till funktionen $x^2 - 8x + 12$:Dvs. $x < 2$ eller $x > 6$.**Svar** $x < 2$ eller $x > 6$ **3**

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad x^6 + 26x^3 &= 27 \\ x^6 + 26x^3 - 27 &= 0 \\ (x^3)^2 + 26x^3 - 27 &= 0 && | \text{Insättning } t = x^3. \\ t^2 + 26t - 27 &= 0 \\ t &= \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27)}}{2 \cdot 1} \\ t &= \frac{-26 \pm 28}{2} \\ t = 1 \quad \text{eller} \quad t = -27 && | t = x^3 \\ x^3 = 1 \quad \text{eller} \quad x^3 = -27 \\ x = \sqrt[3]{1} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt[3]{-27} \\ x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -3\end{aligned}$$

$$\text{b) } x\sqrt{3} + 2x + 12 < 5x$$

$$x\sqrt{3} - 3x < -12$$

$$x(\sqrt{3} - 3) < -12$$

$$| : (\sqrt{3} - 3) (< 0)$$

$$x > \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3} \cdot (-12)$$

$$| (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$x > \frac{-12(\sqrt{3}+3)}{(\sqrt{3})^2 - 3^2}$$

$$x > \frac{-12(\sqrt{3}+3)}{3-9}$$

$$x > \frac{-12(\sqrt{3}+3)}{-6}$$

$$x > 2(\sqrt{3}+3)$$

$$x > 2\sqrt{3} + 6$$

Svar a) $x = -1$ eller $x = 3$ b) $x > 2\sqrt{3} + 6$

4

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \quad | \text{ Vi förlänger med nämnarens konjugatuttryck.}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2} + \frac{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{1^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{6}}{2} + \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{1 - 3} = \frac{\cancel{2}(1 - \sqrt{6})}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{-2}$$

$$= 1 - \sqrt{6} - (\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 1 - \cancel{\sqrt{6}} - \sqrt{2} + \cancel{\sqrt{6}} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\begin{cases} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ |a|^2 = a^2 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}(3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2) + \sqrt{2}(3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2)$$

$$= 3\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Svar a) $1 - \sqrt{2}$ b) $9\sqrt{3} - \sqrt{2}$

5

Ekvationen $tx^2 - 2x + 4 = 0$ är av andra graden om $t \neq 0$. Den har en dubbelrot om diskriminanten $D = 0$.

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad | \quad a = t, b = -2, c = 4$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot t \cdot 4 = 0$$

$$4 - 16t = 0$$

$$-16t = -4$$

$$t = \frac{1}{4} \quad \text{uppfyller villkoret } t \neq 0$$

Om $t = 0$ får ekvationen formen $-2x + 4 = 0$. Denna ekvation är av gradtal ett och kan inte ha en dubbelrot.

Svar $t = \frac{1}{4}$

6

a) Om man talar x minuter per månad, så debiterar operatör A

$$6 + 0,07x \text{ (€)} \quad (x \geq 0)$$

och operatör B debiterar

$$0,56 + 0,11x \text{ (€)} \quad (x \geq 0)$$

b) Operatör A:

$$6 + 0,07 \cdot 120 = 14,40 \text{ (€)}$$

Operatör B:

$$0,56 + 0,11 \cdot 120 = 13,76 \text{ (€)}$$

c) $6 + 0,07x < 0,56 + 0,11x$

$$0,04x > 5,44$$

$$x > 136$$

Anslutning A är förmånligare om taltiden är över 136 min, dvs. över 2 h 16 min.

Svar

a) A: $(6 + 0,07x) \text{ €}$ $(x \geq 0)$

B: $(0,56 + 0,11x) \text{ €}$ $(x \geq 0)$

b) A: 14,40 € B: 13,76 €

c) över 2 h 16 min

7

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 5x + 2$$

Polynomet $P(x)$ är delbart med första gradens binomet $3x - 2$ om och endast om binomets nollställe också är nollställe för polynomet $P(x)$.

Vi bestämmer nollstället för binomet $3x - 2$.

$$3x - 2 = 0$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Vi undersöker om $x = \frac{2}{3}$ är nollställe för polynomet $P(x)$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{2}{3}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 2 \\ &= 3 \cdot \frac{8}{27} + \frac{4}{9} - \frac{10}{3} + 2 \\ &= \frac{8}{9} + \frac{4}{9} - \frac{30}{9} + \frac{18}{9} \\ &= \frac{0}{9} = 0 \end{aligned}$$

Dvs. polynomet $P(x)$ är delbart med binomet $3x - 2$.

Svar Ja, polynomet är delbart med binomet

8

$$3x^4 - x^3 - 6x^2 + 2x > 0$$

Vi ger polynomet i produktform.
Gemensam faktor.

$$x(3x^3 - x^2 - 6x + 2) > 0$$

gruppering

$$x[x^2(3x-1) - 2(3x-1)] > 0$$

$$x(3x-1)(x^2-2) > 0$$

Nollställena:

$$x(3x-1)(x^2-2) = 0$$

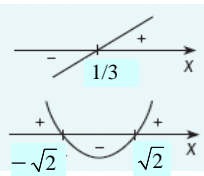
$$x = 0 \text{ eller } 3x-1 = 0 \text{ eller } x^2-2 = 0$$

$$3x = 1 \text{ eller } x^2 = 2$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ eller } x = \pm\sqrt{2}$$

Teckenschema:

x	-	-	+	+	+
$3x-1$	-	-	-	+	+
x^2-2	+	-	-	-	+
prod	+	-	+	-	+
	$-\sqrt{2}$	0	$1/3$	$\sqrt{2}$	



Svar $x < -\sqrt{2}$ eller $0 < x < \frac{1}{3}$ eller $x > \sqrt{2}$

9

a) För talen 1, 2 och 3 är det

- aritmetiska medelvärdet

$$\frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

- geometriska medelvärdet

$$\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6} \approx 1,8$$

- harmoniska medelvärdet

$$\left(\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{6+3+2}{6}}{3}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{11}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{11}{6} \cdot \frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{11}{18}\right)^{-1} = \frac{18}{11}$$

$$= 1\frac{7}{11} \approx 1,6$$

b) Anta att $a > 0$ och $b > 0$.

$$\text{Påstående. } \frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} \text{ dvs. } \frac{a+b}{2} - \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} \geq 0$$

Bevis.

$$\frac{a+b}{2} - \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \left(\frac{\frac{b+a}{ab}}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \left(\frac{b+a}{ab} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \left(\frac{a+b}{2ab}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{2(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0, \quad \text{om } a > 0 \text{ och } b > 0$$

Eftersom $(a-b)^2 \geq 0$ och $2(a+b) > 0$. \square

Medelvärdena är lika stora när

$$\frac{a+b}{2} - \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = 0,$$

dvs. när

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a-b = 0$$

$$a = b$$

Svar

a) Aritmetiska medelvärdet är 2, geometriska medelvärdet är $\sqrt[3]{6} \approx 1,8$ och harmoniska

medelvärdet är $1\frac{7}{11} \approx 1,6$

b) Medelvärdena är lika när talen är lika stora

10

$$\frac{x^2 - 3x}{2x + 3} = x - 3$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 3 \neq 0 \\ x \neq -\frac{3}{2} \\ \cdot (2x + 3) \quad (\neq 0) \end{array} \right.$$

$$x^2 - 3x = (x - 3)(2x + 3)$$

$$x^2 - 3x = 2x^2 + 3x - 6x - 9$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3 \quad \text{duger}$$

Svar

$$x = \pm 3$$