Prov 1

1

a)

$$|123x+45|=66 \qquad \left| \begin{array}{l} |a|=b,\ b\geq 0 \Leftrightarrow \\ a=b \ \text{ eller } \ a=-b \end{array} \right.$$

$$123x+45=66 \quad \text{eller} \quad 123x+45=-66$$
$$123x=21 \quad \text{eller} \quad 123x=-111$$
$$x=\frac{21}{123} \quad \text{eller} \quad x=\frac{-111}{123}$$
$$x=\frac{7}{41} \quad \text{eller} \quad x=-\frac{37}{41}$$

b)

$$|2x+1|=|x-1| \qquad \left| \begin{array}{l} |a|=|b| \Leftrightarrow \\ a=b \ \text{ eller } \ a=-b \end{array} \right.$$

$$2x+1=x-1 \quad \text{eller} \quad 2x+1=-(x-1)$$
$$x=-2 \quad \text{eller} \quad 2x+1=-x+1$$
$$x=-2 \quad \text{eller} \quad 3x=0$$
$$x=-2 \quad \text{eller} \quad x=0$$

c)

$$\sqrt{1-x^2}=|2x-1|$$

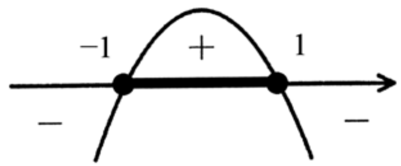
Ekvationen är definierad när

$$1-x^2\geq 0$$

Nollställen:

$$1-x^2=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$

Graf:



Dvs. $-1\leq x\leq 1$

$$\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geq 0}=\underbrace{|2x-1|}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} -1\leq x\leq 1 \\ \text{Om } a\geq 0 \text{ och } b\geq 0, \text{ så är} \\ a=b \Leftrightarrow a^2=b^2. \end{array} \right.$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2=|2x-1|^2 \qquad \left| \left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ |a|^2=a^2 \right.$$

$$1-x^2=(2x-1)^2$$
$$1-x^2=4x^2-4x+1$$
$$-5x^2+4x=0$$
$$x(-5x+4)=0 \qquad |\ \text{nollregeln för en produkt}$$
$$x=0 \ \text{ eller } \ -5x+4=0$$
$$x=0 \ \text{ eller } \ x=\frac{4}{5} \qquad |\ -1\leq x\leq 1$$

duger duger

Svar

a) $x=\frac{7}{41}$ eller $x=-\frac{37}{41}$

b) $x=-2$ eller $x=0$

c) $x=0$ eller $x=\frac{4}{5}$

2

a)

$$|2x-1| < x+2 \qquad \big|\ |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$-(x+2) < 2x-1 < x+2$$

$$-2-x < 2x-1 < x+2$$

1) $-x-2 < 2x-1$ och 2) $2x-1 < x+2$

$-3x < 1$ och $x < 3$

$$x > -\frac{1}{3}$$

Dvs. $-\frac{1}{3} < x < 3$

b)

$$|3x+1| \geq 2x-1 \qquad \big|\ |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ eller } a \geq b$$

$3x+1 \leq -(2x-1)$ eller $3x+1 \geq 2x-1$

$3x+1 \leq -2x+1$ eller $x \geq -2$

$5x \leq 0$

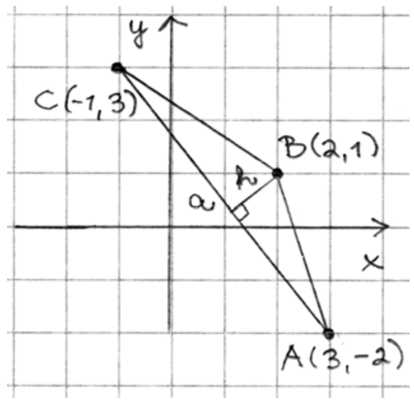
$x \leq 0$

Dvs. $x \leq 0$ eller $x \geq -2$

vilket ger $x \in \mathsf{R}$

Svar a) $-\frac{1}{3} < x < 3$ b) $x \in \mathsf{R}$ 3.

Vi ritar en figur.



Vi väljer sidan $AC = a$ som bas.
Längden av sidan a är

$$a = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2 + (3-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Höjden h är avståndet från punkten B till basen, dvs. till den linje som går genom punkterna A och C.
Vi bestämmer linjens ekvation.
Riktningskoefficienten är

$$k = \frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{3-(-2)}{-1-3} = -\frac{5}{4}$$

Linjens ekvation är

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \left| k=-\frac{5}{4},\ (x_0,y_0)=(-1,3)\right.$$

$$y-3=-\frac{5}{4}(x-(-1))$$

$$y-3=-\frac{5}{4}x-\frac{5}{4} \qquad |\cdot 4$$

$$4y-12=-5x-5$$

$$5x+4y-7=0$$

Avståndet från punkten $(2,1)$ till linjen $5x+4y-7=0$ är

$$h=\frac{|5\cdot 2+4\cdot 1-7|}{\sqrt{5^2+4^2}}=\frac{|7|}{\sqrt{41}}=\frac{7}{\sqrt{41}}$$

Arean av triangeln ABC är

$$A=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{41}\cdot\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

Svar Arean är $3\frac{1}{2}$ a.e.

4

Anta att $A=\left(-2,-2\frac{1}{2}\right)$, $B=(1,3)$ och $C=\left(\frac{1}{5},1\frac{2}{5}\right)$.

Av punkterna A, B och C är två aldrig på samma lodräta linje, eftersom allas x-koordinater är olika.

Alternativ 1

Vi undersöker om riktningskoefficenten k_{AB} för den linje som går genom punkterna A och B är samma som riktningskoeffienten k_{BC} för den linje som går genom punkterna B och C.

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1,y_1)=\left(-2,-2\frac{1}{2}\right) \\ (x_2,y_2)=(1,3) \end{array}\right.$$

$$=\frac{3-\left(-2\frac{1}{2}\right)}{1-(-2)}$$

$$=\frac{5\frac{1}{2}}{3}$$

$$=\frac{11}{6}$$

$$=1\frac{5}{6}$$

$$k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1, y_1) = (1,3) \\ (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}\right) \end{array} \right.$$

$$= \frac{1\frac{2}{5} - 3}{\frac{1}{5} - 1}$$

$$= \frac{\frac{7}{5} - \frac{15}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{5}{5}}$$

$$= \frac{-\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}}$$

$$= 2$$

Eftersom $k_{AB} \neq k_{BC}$, så ligger punkterna A, B och C inte på samma linje.

Alternativ 2

Vi bestämmer ekvationen för den linje som går genom punkterna B och C och undersöker sedan om punkten A:s koordinater uppfyller ekvationen för denna linje.

Ekvationen för linjen BC är

$$y - 3 = 2(x - 1)$$
$$y - 3 = 2x - 2$$
$$2x - y + 1 = 0$$

Insättning av $x = -2$ och $y = -2\frac{1}{2}$ i ekvationen $2x - y + 1 = 0$ ger att

vänstra ledet är $2 \cdot (-2) + 2\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ och

högra ledet är 0

Eftersom koordinaterna för punkten A inte uppfyller linjens ekvation, så ligger punkten A inte på linjen.

Svar Punkten ligger inte på linjen.

5

$l_1: \quad ax - y + 3 = 0$

$l_2: \quad 2x + y - ax - 1 = 0$

Linjerna är vinkelräta mot varandra om $k_1 \cdot k_2 = -1$. Vi skriver om linjernas ekvationer till interceptform.

$$l_1: \quad ax - y + 3 = 0$$
$$y = ax + 3$$
$$k_1 = a$$

$$l_2: \quad 2x + y - ax - 1 = 0$$
$$y = -2x + ax + 1$$
$$y = (a-2)x + 1$$
$$k_2 = a - 2$$

Eftersom $k_1 \cdot k_2 = -1$ får vi ekvationen

$$a(a-2) = -1$$
$$a^2 - 2a = -1$$
$$a^2 - 2a + 1 = 0 \qquad \left| \; a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \right.$$
$$(a-1)^2 = 0$$
$$a - 1 = 0$$
$$a = 1$$

Svar $\quad a = 1$

6

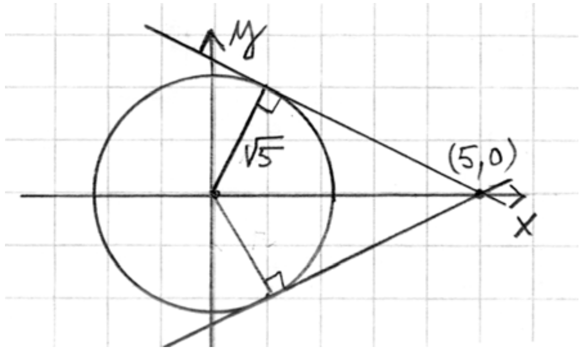
a) Medelpunkten för cirkeln $x^2 + y^2 = 5$ är $(0,0)$ och radien är $\sqrt{5}$.

Tangenten går genom punkten $(5,0)$. Vi får ekvationen

$$y - 0 = k(x-5) \qquad \left| \; y - y_0 = k(x - x_0) \right.$$
$$-kx + y + 5k = 0 \qquad \left| \; \cdot(-1) \right.$$
$$kx - y - 5k = 0$$

Tangentens avstånd till cirkeln medelpunkt är radien $\sqrt{5}$, vilket ger ekvationen

$$\frac{|k \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 5k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \qquad \left| \; d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right.$$
$$\frac{|-5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \qquad \left| \; \cdot \sqrt{k^2 + 1} \right.$$
$$\underbrace{|-5k|}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}}_{\geq 0} \qquad \left| \; (\;\;)^2, \; |a|^2 = a^2 \right.$$
$$25k^2 = 5(k^2 + 1)$$
$$25k^2 = 5k^2 + 5$$
$$20k^2 = 5$$
$$k^2 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$
$$k = \pm\frac{1}{2}$$



Tangenterna:

$$kx - y - 5k = 0 \quad \Big| k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - y - 5\cdot\frac{1}{2} = 0 \quad |\cdot 2$$

$$x - 2y - 5 = 0$$

eller

$$kx - y - 5k = 0 \quad \Big| k = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x - y - 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad |\cdot(-2)$$

$$x + 2y - 5 = 0$$

Svar $x - 2y - 5 = 0$ eller $x + 2y - 5 = 0$

$\left(y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \text{ eller } y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}\right)$

b) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 6 = 0$

Vi skriver om ekvationen till medelpunktsform.

$$x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + 2\cdot y\cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 6 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y+2)^2 - 4 - 6 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = {}^{4)}6 + {}^{4)}4 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{24+16+9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{49}{4}$$

Medelpunkten är $\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$ och radien är $\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

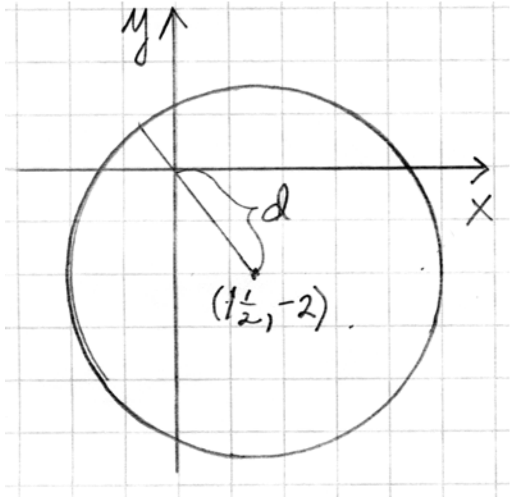
Vi beräknar avståndet från origo till medelpunkten.

$$d = \sqrt{\left(1\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + {}^{4)}4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Eftersom avståndet från origo till medelpunkten är mindre än radien, så ligger origo innanför cirkeln.

Avståndet från origo till cirkeln är då

$$3\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}=1$$



Svar 1

7

Vi skriver om ekvationen till medelpunktsform

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-4x-2ay-2a+3&=0\\
x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2\cdot y\cdot a+a^2-a^2-2a+3&=0\\
(x-2)^2-4+(y-a)^2-a^2-2a+3&=0\\
(x-2)^2+(y-a)^2&=a^2+2a+1\\
(x-2)^2+(y-a)^2&=(a+1)^2
\end{aligned}$$

Medelpunkten är $(2,a)$ och radien är

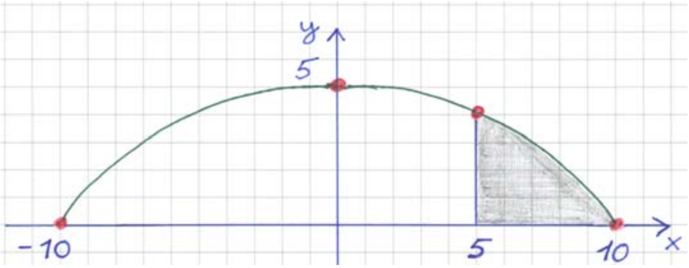
$$\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=\begin{cases} a+1, & \text{när } a>-1\\ -a-1, & \text{när } a<-1.\end{cases}$$

Om $a+1=0$, dvs. om $a=-1$ så är grafen punkten $(2,a)=(2,-1)$.

Svar
Grafen till ekvationen är en cirkel med medelpunkten $(2,a)$ och radien $a+1$, när $a>-1$, en cirkel med medelpunkten $(2,a)$ och radien $-a-1$, när $a<-1$ och punkten $(2,-1)$ när $a=-1$.

8

Vi studerar problemet i ett xy-koordinatsystem. Axlarna har enheten meter.



Parabeln öppnar sig neråt, vilket ger att parabelns ekvation, utgående från toppens koordinater, är

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \quad \left| (x_0, y_0) = (0,5) \right.$$

$$y - 5 = a(x - 0)^2$$

$$y = ax^2 + 5$$

Parabeln går genom punkten $(10,0)$, vilket ger ekvationen

$$0 = a \cdot 10^2 + 5$$

$$-100a = 5$$

$$a = -\frac{1}{20}$$

Dvs. parabelns ekvation är $y = -\frac{1}{20}x^2 + 5$.

När $x = 5$, så är $y = -\frac{1}{20} \cdot 5^2 + 5 = 3{,}75$ (m)

Svar 3,8 m

9

Alternativ 1

Vi bestämmer linjernas gemensamma punkter genom att lösa ett ekvationssystem som består av linjernas ekvationer

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} ax - y + a = 0 \\ -2ax + ay - 3x - 1 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot a,\ a \neq 0 \\ \text{Fallet } a = 0 \text{ måste undersökas} \\ \text{skillt för sig.} \end{array} \right.$$

$$+\begin{cases} a^2x \quad - ay \quad + a^2 = 0 \\ -2ax \quad + ay - 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$a^2x - 2ax - 3x + a^2 - 1 = 0$$

$$(a^2 - 2a - 3)x + a^2 - 1 = 0$$

$$(a^2 - 2a - 3)x = 1 - a^2 \quad \left| \begin{array}{l} :(a^2 - 2a - 3)(\neq 0) \\ \text{Fallet } a^2 - 2a - 3 = 0 \text{ måste} \\ \text{undersökas skillt för sig.} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{1 - a^2}{a^2 - 2a - 3}$$

Vi faktorisera täljaren och nämnaren med hjälp av minnesregler och nollställen.

Täljare: $1-a^2=(1+a)(1-a)$ $\quad\Big|\; a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Nämnare: $a^2-2a-3=0$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$a=\frac{2+4}{2}=3 \text{ eller } a=\frac{2-4}{2}=-1$$

Dvs. $a^2-2a-3=1\cdot(a-3)(a+1)=(a-3)(a+1)$

Skärningspunktens x-koordinat är då

$$x=\frac{1-a^2}{a^2-2a-3}=\frac{(1+a)(1-a)}{(a-3)(a+1)}$$

$\Big|$ $a\neq-1$ och $a\neq3$
Fallen $a=-1$ och $a=3$ måste undersökas skillt för sig.

$$x=\frac{1-a}{a-3}$$

.

Insättning av $x=\dfrac{1-a}{a-3}$ i ekvation (1) ger

$$a\cdot\frac{1-a}{a-3}-y+a=0$$

$$y=\frac{a-a^2}{a-3}+a=\frac{a-a^2+a^2-3a}{a-3}=-\frac{2a}{a-3}$$

Den enda gemensamma punkten för linjerna är $\left(\dfrac{1-a}{a-3},-\dfrac{2a}{a-3}\right)$,

när $a\neq0,\ a\neq-1$ och $a\neq3$.

1) Om $a\neq0,\ a\neq-1$ och $a\neq3$, så har linjerna endast en gemensam punkt.

2) Om $a=0$ så blir det ursprungliga ekvationssystemet

$$\begin{cases}-y=0\\-3x-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\x=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Dvs. linjerna har endast en gemensam punkt $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$.

3) Om $a=-1$ så blir det ursprungliga ekvationssystemet

$$\begin{cases}-x-y-1=0\\2x-y-3x-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x-y-1=0\\-x-y-1=0\end{cases}\quad\begin{vmatrix}\cdot1\\\cdot(-1)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} -x-y-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$
$$0=0 \quad \text{alltid sann}$$

Dvs. linjerna sammanfaller om $a=-1$.

4) Om $a=3$, så blir det ursprungliga ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x-y+3=0 \\ -6x+3y-3x-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y+3=0 & \Big| \cdot 3 \\ -9x+3y-1=0 & \Big| \cdot 1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 9x-3y+9=0 \\ -9x+3y-1=0 \end{cases}$$
$$8=0 \quad \text{alltid falsk}$$

Dvs. linjerna är parallella, men sammanfaller inte om $a=3$.

Alternativ 2
Vi skriver om linjernas ekvationer i interceptform.

l_1: $ax-y+a=0$
$y=ax+a$
$k_1=a$ och $b_1=a$

l_2: $-2ax+ay-3x-1=0$
$ay=2ax+3x+1$

1) Om $a\neq 0$, så kan linjens ekvation delas med talet a.

$ay=2ax+3x+1$ | $:a,\ a\neq 0$
Fallet $a=0$ måste undersökas skillt för sig.

$$y=\frac{2a}{a}x+\frac{3}{a}x+\frac{1}{a}$$
$$y=\left(2+\frac{3}{a}\right)x+\frac{1}{a}$$
$$k_2=2+\frac{3}{a} \quad \text{och} \quad b_2=a$$

a) Linjerna l_1 och l_2 skär varandra om

$$k_1\neq k_2$$
$$a\neq 2+\frac{3}{a}$$

Vi undersöker motsvarande ekvation.

$$a = 2 + \frac{3}{a} \qquad \Big| \cdot a,\ a \neq 0$$

$$a^2 = 2a + 3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$a = -1 \text{ eller } a = 3$$

Olikheten $a \neq 2 + \dfrac{3}{a}$ är uppfylld när $a \neq -1$ och $a \neq 3$.
Också villkoret $a \neq 0$ måste gälla.

b) Linjerna l_1 och l_2 är parallella men sammanfaller inte när

$$k_1 = k_2 \qquad \text{och} \qquad b_1 \neq b_2$$

$$(1)\quad a = 2 + \frac{3}{a} \qquad \text{och} \qquad (2)\, a \neq \frac{1}{a}$$

Lösning till ekvation (1) är enligt a)-fallet $a = -1$ eller $a = 3$.
Olikheten (2) är uppfylld när

$$a \neq \frac{1}{a} \qquad \Big| \cdot a,\ a \neq 0$$

$$a^2 \neq 1$$

$$a \neq \pm 1$$

$$a \neq 1 \text{ eller } a \neq -1$$

Dvs. värdet $a = -1$ på konstanten a duger inte. Enda lösningen är då $a = 3$, som också uppfyller kravet $a \neq 0$.

c) Linjerna l_1 och l_2 sammanfaller när

$$k_1 = k_2 \qquad \text{och} \qquad b_1 = b_2$$

$$(1)\quad a = 2 + \frac{3}{a} \qquad \text{och} \qquad (2)\, a = \frac{1}{a}$$

Lösningar till ekvation (1) är $a = -1$ eller $a = 3$.
Vi undersöker om dessa värden på konstanten a också uppfyller ekvation (2).

Om $a = -1$, så är ekvationens $a = \dfrac{1}{a}$

vänstra led -1 och

högra led $\dfrac{1}{-1} = -1$

Dvs. $a = -1$ är en lösning till ekvation (2).

Om $a=3$, så är ekvationens $a=\frac{1}{a}$

vänstra led 3 och

högra led $\frac{1}{3}$

Dvs. $a=3$ är inte en lösning till ekvation (2). Den enda lösningen är då $a=-1$, som också uppfyller kravet $a\neq 0$.

2) Om $a=0$, så är de ursprungliga linjernas ekvationer

$l_1:\quad -y=0$

$y=0$ dvs. $x-$axeln

$l_2:\quad -3x-1=0$

$-3x=1$

$x=-\frac{1}{3}$ dvs. en lodrät linje

Eftersom linjer skär varandra endast i en punkt så gäller endast a)-fallet för konstanten värde $a=0$.

Svar a) $a\neq -1$ och $a\neq 3$
b) $a=3$
c) $a=-1$

10

Vi bestämmer skärningspunkterna genom att lösa ekvationssystemet.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y=kx+1\\ y=-x^2-x\end{cases}\qquad \Big|\ \text{Insättning i ekvation } (2).$$

$$kx+1=-x^2-x$$
$$x^2+kx+x+1=0$$
$$x^2+(k+1)x+1=0$$

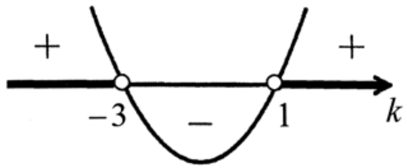
Det finns två skärningspunkter om och endast om

$$D>0\qquad \big|\ D=b^2-4ac$$
$$(k+1)^2-4\cdot 1\cdot 1>0$$
$$k^2+2k+1-4>0$$
$$k^2+2k-3>0$$

Nollställen:

$$k^2+2k-3=0$$
$$k=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 4}{2}$$
$$k=1 \text{ eller } k=-3$$

Graf:



Dvs. $k<-3$ eller $k>1$

Skärningspunkternas x-koordinater:

$$x^2+(k+1)x+1=0$$

$$x=\frac{-(k+1)\pm\sqrt{[-(k+1)]^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \qquad \left| a^2=(-a)^2\right.$$

$$x=\frac{-k-1\pm\sqrt{(k+1)^2-4}}{2}$$

$$x=\frac{-k-1\pm\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$$

Summan av skärningspunkternas x-koordinater är

$$x_1+x_2=\frac{-k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2}+\frac{-k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$$

$$=\frac{-k-1+\sqrt{k^2+2k-3}-k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$$

$$=\frac{-2k-2}{2}$$

$$=\frac{2(-k-1)}{2}$$

$$=-k-1$$

Summan av skärningspunkternas y-koordinater är

$$y_1+y_2=(kx_1+1)+(kx_2+1) \qquad \left|\text{ekvation } (1)\right.$$

$$=kx_1+1+kx_2+1$$

$$=k(x_1+x_2)+2 \qquad \left| x_1+x_2=-k-1\right.$$

$$=k(-k-1)+2$$

$$=-k^2-k+2$$

Skärningspunkternas x- och y-koordinaters summa skall vara lika stora, vilket ger ekvationen

$$x_1+x_2=y_1+y_2$$

$$-k-1=-k^2-k+2$$

$$k^2=3$$

$$k=\pm\sqrt{3} \qquad \left| k<-3 \text{ eller } k>1\right.$$

$$k=\sqrt{3}$$

Svar $\quad k=\sqrt{3}$

Prov 2

1

a)

$$|2x-1| = |3x+2| \qquad \left| \begin{array}{l} |a| = |b| \Leftrightarrow \\ a = b \;\; \text{eller} \;\; a = -b \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 3x+2 && \text{eller} && 2x-1 = -(3x+2) \\ 2x-3x &= 2+1 && \text{eller} && 2x-1 = -3x-2 \\ -x &= 3 && \text{eller} && 5x = -1 \\ x &= -3 && \text{eller} && x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

b)

$$\underbrace{|3x-2|}_{\geq 0} \geq \underbrace{|-x+1|}_{\geq{}^\wedge 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Om } a \geq 0 \;\; \text{och} \;\; b \geq 0, \text{ så är} \\ a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2. \end{array} \right.$$

$$|3x-2|^2 \geq |-x+1|^2 \qquad \left| \, |a|^2 = a^2 \right.$$

$$(3x-2)^2 \geq (-x+1)^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$8x^2 - 10x + 3 \geq 0$$

Nollställen:

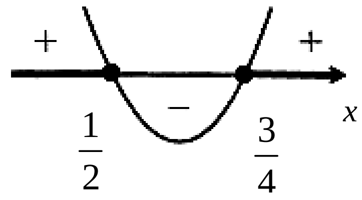
$$8x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{2 \cdot 8} = \frac{10 \pm 2}{16}$$

$$x = \frac{12}{16} \quad \text{eller} \quad x = \frac{8}{16}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{eller} \quad x = \frac{1}{2}$$

Graf:



Dvs. $x \leq \frac{1}{2}$ eller $x \geq \frac{3}{4}$

c) $x|x| - 2x + 1 = 0$

1) Om $x \geq 0$, så får vi att

$$x|x| - 2x + 1 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{Om } a \geq 0, \text{ så är } |a| = a. \end{array} \right.$$

$$x \cdot x - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 \qquad \left| \, x \geq 0 \right.$$

duger

2) Om $x<0$, så får vi att

$$x|x|-2x+1=0 \qquad \left| \begin{array}{l} x<0 \\ \text{Om } a<0, \text{ så är } |a|=-a. \end{array} \right.$$

$$x\cdot(-x)-2x+1=0$$

$$-x^2-2x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{-2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{-2}$$

$$x=\frac{2\left(1\pm\sqrt{2}\right)}{-2}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{-1}$$

$$x=-1\mp\sqrt{2} \qquad |\, x<0$$

$$x=-1-\sqrt{2}$$

Genom att förena punkterna 1 och 2 får vi svaret
$x=1$ eller $x=-1-\sqrt{2}$.

Svar a) $x=-3$ eller $x=-\frac{1}{5}$

b) $x\le\frac{1}{2}$ eller $x\ge\frac{3}{4}$

c) $x=1$ eller $x=-1-\sqrt{2}$

2

Vi bestämmer skärningspunkterna mellan parabeln och linjen genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases} \qquad \Big|\ \text{Insättning i ekvation } (2).$$

$$3x-2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)+5=0$$

$$3x-x^2-x-2+5=0$$

$$-x^2+2x+3=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}$$

$$x=-1 \text{ eller } x=3 \qquad \Big|\ \text{Insättning i ekvation } (1).$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+\frac{1}{2}\cdot(-1)+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1 \quad \text{eller}$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot 3^2+\frac{1}{2}\cdot 3+1=4\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+1=7$$

Skärningspunkterna (sträckans ändpunkter) är
$(-1,1)$ och $(3,7)$.

Sträckans längd är

$$\sqrt{(-1-3)^2+(1-7)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=\sqrt{4\cdot 13}=2\sqrt{13}$$

Svar Sträckans längd är $2\sqrt{13}$.

3

Linjen *l* går genom punkterna $A=(-2,2)$ och $B=(1,-4)$.

Riktningskoefficienten för linjen l är

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1,y_1)=(-2,2) \\ (x_2,y_2)=(1,-4) \end{array} \right.$$

$$=\frac{-4-2}{1-(-2)}$$

$$=\frac{-6}{3}$$

$$=-2$$

Linjen *s*:

$$ax-3x+y+1=0$$

$$y=-ax+3x-1$$

$$y=(-a+3)x-1$$

Riktningskoefficienten för linjen s är $k=-a+3$.
Eftersom linjen *s* är fallande, så är $k<0$, vilket ger

$$-a+3<0$$

$$a>3$$

Linjen *l* faller brantare än linjen s om

$$k_{AB}<k \qquad \left| \mathrm{k}_{\mathrm{AB}}=-2,\ k=-a+3 \right.$$

$$-2<-a+3$$

$$a<5$$

Dvs. $3<a<5$.

Svar $3<a<5$

4

Alternativ 1

Anta att (x_0, y_0) är en punkt som ligger på avståndet 2 från linjen $3x-4y+1=0$.
Punkten (x_0, y_0) uppfyller ekvationen

$$\frac{|3x_0-4y_0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$$\frac{|3x_0-4y_0+1|}{5}=2 \qquad \Big|\cdot 5$$

$$|3x_0-4y_0+1|=\underbrace{10}_{\geq 0} \qquad \begin{array}{|l} \text{Om } b\geq 0, \text{ så är} \\ |a|=b \Leftrightarrow a=b \text{ eller } a=-b \end{array}$$

$$3x_0-4y_0+1=10 \quad \text{eller} \quad 3x_0-4y_0+1=-10$$
$$3x_0-4y_0-9=0 \quad \text{eller} \quad 3x_0-4y_0+11=0$$

Lösningarna är exakt de punkter som uppfyller ekvationen $3x_0-4y_0-9=0$ eller $3x_0-4y_0+11=0$. Om lösningspunkten betecknas (x, y), så är lösningen linjerna $3x-4y-9=0$ och $3x-4y+11=0$.

Alternativ 2

De punkter som ligger på avståndet 2 från linjen $3x-4y+1=0$ bildar två linjer, som är parallella med denna linje. Alla linjer som är parallella med linjen $3x-4y+1=0$ har en ekvation av formen $3x-4y+c=0,\ c\in\mathbb{R}$, eftersom de har samma riktningskoefficient $k=\frac{3}{4}$.
Vi bestämmer ett sådant värde på konstanten c att avståndet mellan linjerna är 2. Vi väljer en punkt på linjen $3x-4y+1=0$.
När $x=0$, så är $y=\frac{1}{4}$, vilket ger att $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ är en punkt på linjen. Eftersom avståndet från punkten $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ till linjen $3x-4y+c=0$ skall vara 2 får vi ekvationen

$$\frac{\left|3\cdot 0-4\cdot\frac{1}{4}+c\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$$\frac{|-1+c|}{5}=2$$

$$|c-1|=\underbrace{10}_{\geq 0} \qquad \begin{array}{|l} \text{Om } b\geq 0, \text{ så är} \\ |a|=b \Leftrightarrow a=b \text{ eller } a=-b \end{array}$$

$$c-1=10 \quad \text{eller} \quad c-1=-10$$
$$c=11 \quad \text{eller} \quad c=-9$$

Linjernas ekvationer är $3x-4y+11=0$ och $3x-4y-9=0$.

Svar Linjerna är $3x-4y+11=0$ och $3x-4y-9=0$.

5

Vi skriver om ekvationen i medelpunktsform

$$4x^2+4y^2+20x-12y-15=0 \quad \Big| :4$$

$$x^2+y^2+5x-3y-\frac{15}{4}=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2-2\cdot y\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}+\frac{9}{4}+\frac{15}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

Medelpunkten är $\left(-2\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$ och radien är $\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

Vi beräknar avståndet från punkten $(-4,5)$ till medelpunkten.

$$\sqrt{\left(-2\frac{1}{2}-(-4)\right)^2+\left(1\frac{1}{2}-5\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9+49}{4}}=\sqrt{\frac{58}{4}}$$

Vi jämför detta avstånd med radien $\sqrt{\frac{49}{4}}$.

Eftersom $\sqrt{\frac{58}{4}}>\sqrt{\frac{49}{4}}$, så ligger punkten utanför cirkeln.

Svar Medelpunkten är $\left(-2\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$ och radien är $3\frac{1}{2}$.

Punkten $(-4,5)$ ligger utanför cirkeln.

6

Cirkelns ekvation i allmän form är

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

Insättning av punkterna $(0,4)$, $(-1,-1)$ och $(5,3)$ i cirkeln ekvation ger ekvationssystemet

$$\begin{array}{l} (0,4) \\ (-1,-1) \\ (5,3) \end{array} \begin{cases} 16+4b+c=0 & \Big| :4 \\ 1+1-a-b+c=0 \\ 25+9+5a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} b=-\dfrac{c}{4}-4 & \Big| \text{Insättning i ekvation } (2). \\ a=-b+c+2 \\ 34+5a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} b=-\dfrac{c}{4}-4 & \Big| \text{Insättning i ekvation } (3). \\ a=\dfrac{c}{4}+4+c+2=\dfrac{5}{4}c+6 & \Big| \text{Insättning i ekvation } (3). \\ 34+5a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$(3): \quad 34+5\left(\frac{5}{4}c+6\right)+3\left(-\frac{c}{4}-4\right)+c=0$$

$$\frac{25}{4}c-\frac{3}{4}c+{}^{4)}c=-34-30+12$$

$$\frac{26}{4}c=-52 \qquad \Big| \cdot\frac{4}{26}$$

$$c=-\frac{52\cdot 4}{26}=-8$$

$$(1): \quad b=-\frac{c}{4}-4=2-4=-2$$

$$(2): \quad a=\frac{5}{4}c+6=-10+6=-4$$

Dvs. cirkelns ekvation är

$$x^2+y^2-4x-2y-8=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-8=0$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=8+4+1$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$$

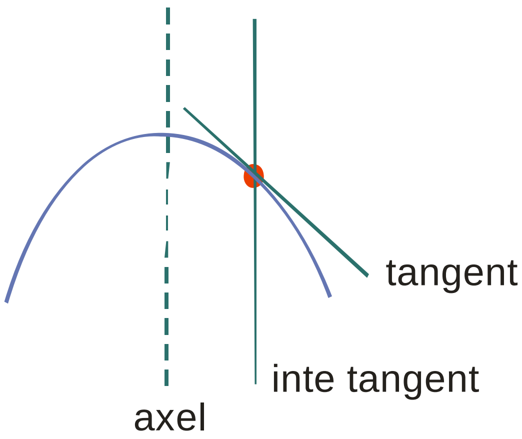
Cirkelns radie är $\sqrt{13}$ och

cirkelns area är $A=\pi r^2=13\pi$.

Svar 13π

7

Parabeln $y = -x^2 + 1$ öppnar sig neråt. En linje är tangent till parabeln om och endast om linjen och parabeln har exakt en punkt gemensam samt linjen inte är lodrät (parallell med parabelns axel). Dvs. tangenten har en riktningskoefficient. Anta att tangentens riktningskoefficient är k.



En tangent som går genom punkten $(2,-3)$ har ekvationen

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (2,-3) \right.$$
$$y - (-3) = k(x-2)$$
$$y + 3 = kx - 2k$$
$$y = kx - 2k - 3$$

Parabelns och tangentens gemensamma punkter:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = kx - 2k - 3 \end{cases} \qquad \left| \text{Insättning i ekvation } (2). \right.$$
$$-x^2 + 1 = kx - 2k - 3$$
$$-x^2 - kx + 2k + 4 = 0$$

Ekvationen har en och endast en lösning om diskriminanten

$$D = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \\ a = -1,\ b = -k,\ c = 2k + 4 \end{array} \right.$$
$$(-k)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (2k + 4) = 0$$
$$k^2 + 8k + 16 = 0$$
$$(k + 4)^2 = 0$$
$$k + 4 = 0$$
$$k = -4$$

Dvs. tangentens ekvation är

$$y = -4x - 2 \cdot (-4) - 3$$
$$y = -4x + 5$$

Svar $y = -4x + 5$

8

Påstående Alla linjer i linjeskaran

$$(5-3a)x+2ay-4y-4a+5=0$$

går genom samma punkt.

Bevis

Alternativ 1

Vi väljer två linjer ur linjeskaran genom att ge parametern a två värden, t.ex. $a=0$ och $a=1$.

$$a=0: \quad (5-3\cdot 0)x+2\cdot 0\cdot y-4y-4\cdot 0+5=0$$
$$5x-4y+5=0$$

$$a=1: \quad (5-3\cdot 1)x+2\cdot 1\cdot y-4y-4\cdot 1+5=0$$
$$2x+2y-4y-4+5=0$$
$$2x-2y+1=0$$

Vi beräknar linjernas skärningspunkt

$$\begin{cases} 5x-4y+5=0 \\ 2x-2y+1=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot(-5) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} 5x-4y+5=0 \\ -4x+4y-2=0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 10x-8y+10=0 \\ -10x+10y-5=0 \end{cases}$$

$$x \quad +3=0 \qquad\qquad 2y+5=0$$

$$x=-3 \qquad\qquad y=-\frac{5}{2}$$

Dvs. skärningspunkten är $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$.

Vi måste ytterligare visa att alla linjer i linjeskaran går genom punkten $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$.

Vi sätter in $x=-3$ och $y=-\frac{5}{2}$ i ekvationen för linjeskaran.

Vänstra ledet är

$$(5-3a)\cdot(-3)+2a\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-4a+5$$
$$=-15+9a-5a+10-4a+5$$
$$=-15+10+5+9a-5a-4a$$
$$=0$$

och

högra ledet är 0.

Dvs. alla linjer i linjeskaran går genom punkten $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$ oberoende av värdet på parametern a, vilket ger att påståendet är sant. □

Alternativ 2

Vi undersöker för vilka värden på variablerna x och y som ekvationen $(5-3a)x+2ay-4y-4a+5=0$ är uppfylld, oberoende av parametervärdet a.

$$(5-3a)x+2ay-4y-4a+5=0$$
$$5x-3ax+2ay-4y-4a+5=0$$
$$(5x-4y+5)+(-3ax+2ay-4a)=0$$
$$(5x-4y+5)+a(-3x+2y-4)=0$$

Ekvationen är uppfylld för alla värden på a om

$$\begin{cases} 5x-4y+5=0 \\ -3x+2y-4=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 5 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} 5x-4y+5=0 \\ -6x+4y-8=0 \end{cases}$$
$$-x \qquad -3=0$$
$$x=-3$$

$$+\begin{cases} 15x-12y+15=0 \\ -15x+10y-20=0 \end{cases}$$
$$-2y \quad -5=0$$
$$2y=-5$$
$$y=-\frac{5}{2}$$

Punkten $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$ uppfyller ekvationen för linjeskaran, oberoende av värdet på a. Dvs. alla linjer i linjeskaran går genom punkten $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$. Då är påståendet sant. □

Vi bestämmer linjens riktningskoefficient ur ekvationen $(5-3a)x+2ay-4y-4a+5=0$.

$$(5-3a)x+2ay-4y-4a+5=0$$
$$2ay-4y=-(5-3a)x+4a-5$$
$$(2a-4)y=(3a-5)x+4a-5 \qquad \left| \begin{array}{l} :(2a-4),\, 2a-4\neq 0 \\ \text{dvs. } a\neq 2 \end{array} \right.$$
$$y=\frac{3a-5}{2a-4}x+\frac{4a-5}{2a-4}$$

Linjens riktningskoefficient är

$$k=\frac{3a-5}{2a-4},\quad a\neq 2$$

Linjen är vågrät om

$$k=0 \text{ vilket ger}$$
$$3a-5=0$$
$$3a=5$$
$$a=\frac{5}{3}$$

Dvs. en vågrät linje hör till linjeskaran. Vi får den om $a=\frac{5}{3}$.

Om $a = 2$ så är inte uttrycket $\dfrac{3a-5}{2a-4}$ definierat, dvs. det existerar ingen riktningskoefficient. Linjen är då lodrät.
Kontroll: Insättning av $a = 2$ i ekvationen för linjeskaran ger

$$\begin{aligned} (5-3\cdot 2)x + 2\cdot 2y - 4y - 4\cdot 2 + 5 &= 0 \\ -x + 4y - 4y - 8 + 5 &= 0 \\ -x - 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

som är en lodrät linje.

Dvs. en lodrät linje hör till linjeskaran. Vi får denna linje om $a = 2$.

Svar Det hör både en lodrät och en vågrät linje till linjeskaran.

9

Ekvationen för en linje som går genom punkten $(-1,2)$ är

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (-1,2) \right. \\ y - 2 &= k(x+1) \\ y &= kx + k + 2 \end{aligned}$$

Skärningspunkten mellan linjen och *y*-axeln:

$$x = 0$$
$$y = k + 2$$

Dvs. $A = (0, k+2)$, vilket ger $|OA| = |k+2|$.

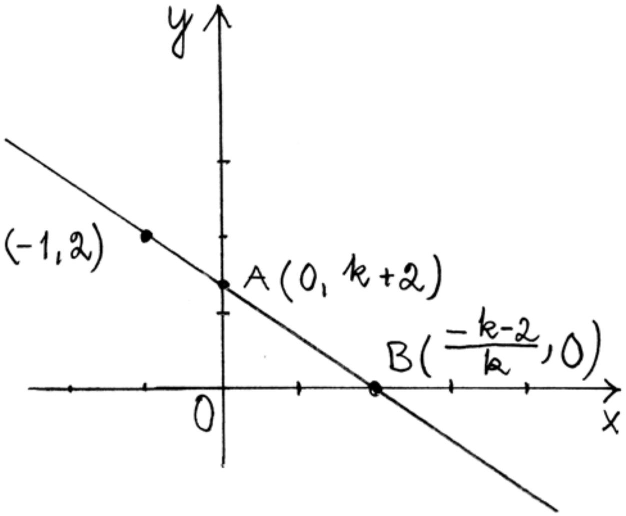
Skärningspunkten mellan linjen och *x*-axeln:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 0 &= kx + k + 2 \\ kx &= -k - 2 \qquad \left| : k,\ k \neq 0 \right. \\ x &= \frac{-k-2}{k} \end{aligned}$$

Dvs. $B = \left(\dfrac{-k-2}{k}, 0 \right)$, vilket ger $|OB| = \left| \dfrac{-k-2}{k} \right|$.

Anmärkning:
Om $k = 0$, så är linjen $y = 2$, vilket ger att ingen triangel uppstår.

Figur:



Triangelns area är $\frac{1}{2}$, vilket ger

$$\frac{|OB|\cdot|OA|}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\left|\frac{-k-2}{k}\right||k+2|}{2}=\frac{1}{2} \qquad \Big|\cdot 2$$

$$\left|\frac{-k-2}{k}\right||k+2|=1 \qquad \Big|\cdot|k|,\ k\neq 0$$

$$|-k-2||k+2|=|k| \qquad \Big|\ |-a|=|a|$$

$$|k+2||k+2|=|k|$$

$$|k+2|^2=|k|$$

$$(k+2)^2=|k|$$

1) Om $k>0$ får vi ekvationen

$$(k+2)^2=k$$

$$k^2+4k+4=k$$

$$k^2+3k+4=0$$

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}\notin \mathrm{R}$$

Ekvationen saknar lösning.

2) Om $k<0$ får vi ekvationen

$$(k+2)^2=-k$$

$$k^2+4k+4=-k$$

$$k^2+5k+4=0$$

$$k=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$k=\frac{-5\pm3}{2}$$

$$k=-4 \text{ eller } k=-1 \ (\text{duger})$$

Svar $k=-4$ eller $k=-1$

10

a) Ekvationen för en tangent som går genom punkten $(2,-4)$ är

$$y-(-4)=k(x-2)$$
$$y+4=kx-2k$$
$$kx-y-2k-4=0$$

Tangenten ligger på avståndet radien från cirkelns medelpunkt. Dvs. Avståndet från linjen $kx-y-2k-4=0$ till cirkelns $x^2+y^2=10$ medelpunkt $(0,0)$ är radien $\sqrt{10}$. Vi får ekvationen

$$\frac{|k\cdot 0-1\cdot 0-2k-4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10} \qquad \left| \; d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right.$$

$$\underbrace{|-2k-4|}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{10}\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0}$$

Om $a\geq 0$ och $b\geq 0$, så är $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$

$$|-2k-4|^2=\left(\sqrt{10}\sqrt{k^2+1}\right)^2$$
$$4k^2+16k+16=10k^2+10$$
$$-6k^2+16k+6=0 \qquad |:(-2)$$
$$3k^2-8k-3=0$$

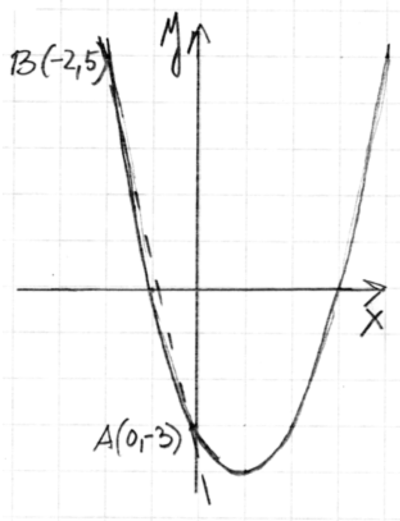
$$k=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3}$$
$$k=\frac{8\pm 10}{6}$$
$$k=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3} \quad \text{eller} \quad k=\frac{18}{6}=3$$

Vi får två tangenter, vars riktningskoefficienter är $-\frac{1}{3}$ och 3.

Eftersom $-\frac{1}{3}\cdot 3=-1$, så är tangenterna vinkelräta mot varandra.

□

b) Riktningskoefficienten för den sekant som går genom punkterna $A=(0,-3)$ och $B=(-2,5)$ på parabeln $y=x^2-2x-3$ är



$$k_{AB}=\frac{-3-5}{0-(-2)}=\frac{-8}{2}=-4$$

Dvs. tangenten till parabeln har riktningskoefficienten -4 och tangentens ekvation har formen

$$y=-4x+b$$

Vi betecknar kurvans och tangentens tangeringspunkt (x_0, y_0).
Punktens koordinater uppfyller vardera ekvationerna. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} y_0 = -4x_0 + b \\ y_0 = x_0^{\ 2} - 2x_0 - 3 \end{cases} \quad \Big| \text{ Insättning i ekvation } (1).$$

$$x_0^{\ 2} - 2x_0 - 3 = -4x_0 + b$$

$$(3) \quad x_0^{\ 2} + 2x_0 - 3 - b = 0$$

Parabeln och dess tangent har exakt en punkt gemensam, vilket ger att den erhållna ekvationen har exakt en lösning. Detta gäller om och endast om diskriminanten $D = 0$. Vi får ekvationen

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3 - b) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \\ a = 1,\ b = 2,\ c = -3 - b \end{array} \right.$$

$$4 + 12 + 4b = 0$$

$$4b = -16$$

$$b = -4$$

Dvs. tangentens ekvation är $y = -4x - 4 \iff 4x + y + 4 = 0$.
Insättning av $b = -4$ i ekvation (3) ger

$$x_0^{\ 2} + 2x_0 - 3 - (-4) = 0$$

$$x_0^{\ 2} + 2x_0 + 1 = 0$$

$$(x_0 + 1)^2 = 0$$

$$x_0 + 1 = 0$$

$$x_0 = -1$$

Tangeringspunktens *x*-koordinat är $x_0 = -1$ och *y*-koordinaten får vi genom att sätta in $x_0 = -1$ i t.ex. tangentens ekvation.

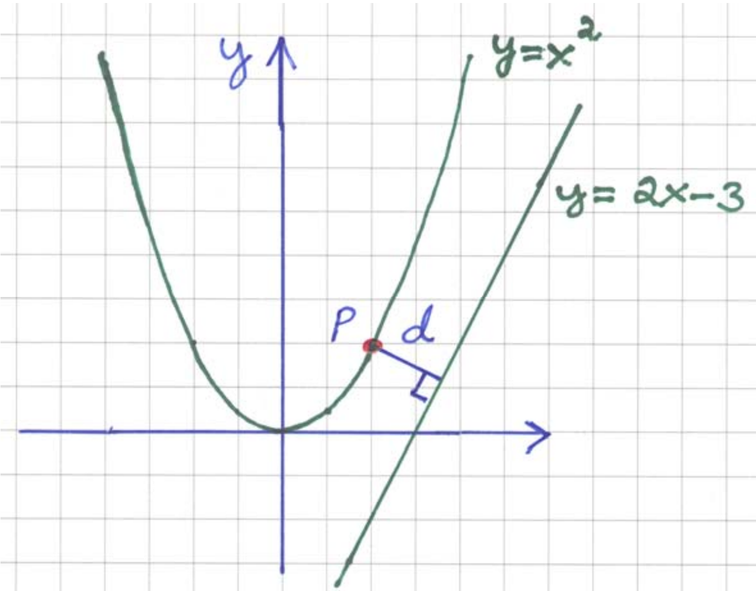
$$y_0 = -4x_0 - 4 = -4 \cdot (-1) - 4 = 0$$

Dvs. tangeringspunkten är $(-1, 0)$.

Svar Tangeringspunkten är $(-1, 0)$.
Tangentens ekvation är $4x + y + 4 = 0$.
(Tangentens ekvation är $y = -4x - 4$.)

c)

Anta att $P=(x,y)$ är en punkt på parabeln $y=x^2$. Då är $P=(x,x^2)$.



Avståndet från punkten P till linjen $y=2x-3 \;\Leftrightarrow\; 2x-y-3=0$ är

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a=2,\; b=-1,\; c=-3$

$(x_0,y_0)=(x,x^2)$

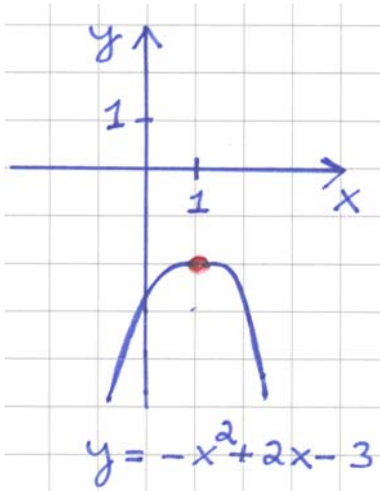
$$d=\frac{|2x-x^2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}$$

Grafen $y=-x^2+2x-3$ till uttrycket $-x^2+2x-3$ är en parabel som öppnar sig neråt. Parabelns topp:

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\cdot(-1)}=1$$

$$y_0=-1^2+2\cdot1-3=-2$$

dvs. toppen är $(1,-2)$



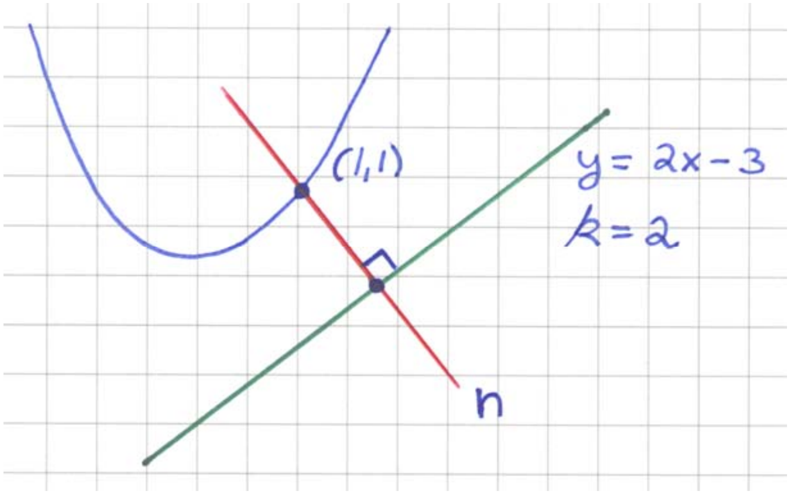
Uttrycket $-x^2+2x-3$ kan då få värden i intervallet $]-\infty,-2]$ och uttrycket $|-x^2+2x-3|$ kan få värden i intervallet $[2,\infty[$. Det får sitt minsta värde 2 när $x=1$. Avståndet d får då sitt minsta värde $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ när $x=1$. Då är $y=1^2=1$.

Dvs. punkten $(1,1)$ på parabeln ligger närmast linjen $y=2x-3$.

Parabelns avstånd (kortaste avståndet) till linjen är samma som linjens avstånd (kortaste avståndet) till parabeln.

Dvs. vi skall bestämma den punkt på linjen $y=2x-3$, som ligger närmast punkten $(1,1)$ på parabeln.

Vi bestämmer först den normal till linjen $y=2x-3$ som går genom punkten $(1,1)$. Sedan bestämmer vi skärningspunkten mellan normalen och linjen $y=2x-3$.



Normalens riktningskoefficient är

$$k_n = -\frac{1}{k} \qquad \Big| \, k = 2$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Normalens ekvation är

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Big| \begin{array}{l} (x_0, y_0) = (1,1) \\ k = k_n = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Vi bestämmer skärningspunkten mellan normalen och linjen $y = 2x - 3$ genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = 2x - 3 \end{cases} \qquad \Big| \text{ Insättning i ekvation } (1).$$

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \Big| \cdot 2$$

$$4x - 6 = -x + 3$$

$$5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} \qquad \Big| \text{ Insättning i ekvation } (2).$$

$$y = 2 \cdot \frac{9}{5} - 3 = \frac{18}{5} - 3 = 3\frac{3}{5} - 3 = \frac{3}{5}$$

Dvs. den sökta punkten är $\left(1\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Svar Punkten (1, 1) på parabeln ligger närmast linjen och punkten $\left(1\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ på linjen ligger närmast parabeln.

Prov 3

1

a) Vi betecknar

$$A=(3,-8)$$
$$B=(-2,10)$$

linjen $l: y=\frac{1}{2}x+1$ eller

$$x-2y+2=0$$

Punktens avstånd från linjen l är

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \Big|\ a=1,\ b=-2,\ c=2$$

$$A: \quad d=\frac{|1\cdot 3+(-2)\cdot(-8)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \qquad \Big|\ (x_0,y_0)=(3,-8)$$
$$=\frac{|3+16+2|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{21}{\sqrt{5}}$$

$$B: \quad d=\frac{|1\cdot(-2)+(-2)\cdot 10+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \qquad \Big|\ (x_0,y_0)=(-2,10)$$
$$=\frac{|-2-20+2|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{|-20|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{20}{\sqrt{5}}$$

Eftersom $\frac{20}{\sqrt{5}}<\frac{21}{\sqrt{5}}$, så ligger punkten B närmare linjen än punkten A.

b) Vi betecknar

$$A=(1,2)$$
$$B=(-3,-6)$$
$$P=(x_m,y_m),$$

där (x_m,y_m) är mittpunkt på sträckan AB.

Riktningskoefficienten för den linje som går genom punkterna A och B är

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_2} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1,y_1)=(1,2) \\ (x_2,y_2)=(-3,-6) \end{array} \right.$$

$$=\frac{-6-2}{-3-1}$$

$$=\frac{-8}{-4}$$

$$=2$$

Normalen till sträckan AB har då riktningskoefficienten k_n:

$$k_n\cdot k_{AB}=-1$$

$$k_n=-\frac{1}{k_{AB}} \qquad \left| k_{AB}=2 \right.$$

$$=-\frac{1}{2}$$

Mittpunkten P har koordinaterna

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y_m=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2+(-6)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

dvs. $P=(-1,-2)$

Mittpunktsnormalens ekvation är

$$y-y_k=k_n(x-x_k) \qquad \left| (x_m,y_m)=(-1,-2),\ k_n=-\frac{1}{2} \right.$$

$$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-(-1))$$

$$y+2=-\frac{1}{2}(x+1) \qquad \left| \cdot 2 \right.$$

$$2y+4=-x-1$$

$$x+2y+5=0$$

c) Vi betecknar

$$A=\left(\sqrt{3},-1\right)$$

$$B=(0,a)$$

Riktningskoefficienten k_{AB} för den linje som går genom punkterna A och B är

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_2} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1,y_1)=\left(\sqrt{3},-1\right) \\ (x_2,y_2)=(0,a) \end{array} \right.$$

$$=\frac{a-(-1)}{0-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{a+1}{-\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{a+1}{\sqrt{3}}$$

Riktningsvinkeln α ger att

$$\tan\alpha = k_{AB} \qquad \left|\ \alpha = -60^\circ,\ k_{AB} = -\frac{a+1}{\sqrt{3}}\right.$$

$$\tan\left(-60^\circ\right) = -\frac{a+1}{\sqrt{3}} \qquad \left|\ \tan\left(-60^\circ\right) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}\right.$$

$$-\sqrt{3} = -\frac{a+1}{\sqrt{3}} \qquad \left|\ \cdot\left(-\sqrt{3}\right)\right.$$

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = a+1$$

$$3 = a+1$$

$$a = 2$$

d) Vi betecknar

linjen l_1: $bx - y + 1 = 0$

$$y = bx + 1$$

riktningskoefficienten $k_1 = b$

linjen l_2: $2x - 3y + 5 = 0$

$$3y = 2x + 5 \qquad \left|\ :3\right.$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

riktningskoefficienten $k_2 = \dfrac{2}{3}$

Vinkeln α mellan linjerna uppfyller ekvationen

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left|\ \alpha = 45^\circ,\ k_1 = b,\ k_2 = \frac{2}{3}\right.$$

$$\tan 45^\circ = \left|\frac{{}^{3)}b - \frac{2}{3}}{{}^{3)}1 + b\cdot\frac{2}{3}}\right| \qquad \left|\ \tan 45^\circ = 1,\ b \neq -\frac{3}{2}\right.$$

$$1 = \left|\frac{\frac{3b-2}{3}}{\frac{3+2b}{3}}\right|$$

$$1 = \left|\frac{3b-2}{3+2b}\right|$$

$$\frac{3b-2}{3+2b} = \pm 1$$

1)

$$\frac{3b-2}{3+2b}=-1 \qquad \left| b\neq -\frac{3}{2}\right.$$

$$3b-2=-(3+2b)$$

$$3b-2=-3-2b$$

$$5b=-1$$

$$b=-\frac{1}{5} \qquad (\text{duger})$$

2)

$$\frac{3b-2}{3+2b}=1 \qquad \left| b\neq -\frac{3}{2}\right.$$

$$3b-2=3+2b$$

$$b=5 \qquad (\text{duger})$$

Svar a) Punkten $(-2,10)$ ligger närmare.

b) $x+2y+5=0$

$\left(y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)$

c) $a=2$

d) $b=-\frac{1}{5}$ eller $b=5$

2

a) Ekvationen för en parabeln som öppnar sig neråt är, utgående från toppen,

$$y-y_0=a(x-x_0)^2,\ a<0 \qquad \left|(x_0,y_0)=(1,-1)\right.$$

$$y-(-1)=a(x-1)^2$$

$$y+1=a(x-1)^2$$

Koordinaterna för punkten $(0,-3)$ uppfyller parabelns ekvation. Vi får ekvationen

$$-3+1=a(0-1)^2$$

$$-2=a\cdot 1$$

$$a=-2 \qquad \left|a<0\right.$$

duger

Dvs. parabelns ekvation är, utgående från toppen,

$$y+1=-2(x-1)^2$$

Parabelns ekvation kan också skrivas

$$y+1=-2(x-1)^2$$

$$y+1=-2(x^2-2x+1)$$

$$y+1=-2x^2+4x-2$$

$$y=-2x^2+4x-3$$

b) Ekvationen för en parabel, som öppnar sig uppåt, är utgående från nollställena

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),\ a > 0 \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$$

$$y = a[x - (-3)][x - (-1)]$$

$$y = a(x+3)(x+1)$$

Parabeln går genom punkten $(-4,6)$ vilket ger ekvationen

$$6 = a(-4+3)(-4+1)$$

$$6 = a \cdot (-1) \cdot (-3)$$

$$6 = 3a$$

$$a = 2 \qquad \big|\, a > 0$$

duger

Dvs. parabelns ekvation är, utgående från nollställena
$y = 2(x+3)(x+1)$

Parabelns ekvation kan också skrivas

$$y = 2(x+3)(x+1)$$

$$y = 2(x^2 + x + 3x + 3)$$

$$y = 2(x^2 + 4x + 3)$$

$$y = 2x^2 + 8x + 6$$

Svar a) $y + 1 = -2(x-1)^2$

$\left(y = -2x^2 + 4x - 3\right)$

b) $y = 2(x+3)(x+1)$

$\left(y = 2x^2 + 8x + 6\right)$

3

a) Vi väljer en godtycklig punkt P från linjen $2x - 4y + 4 = 0$.
Eftersom punkten P ligger på linjen, så uppfyller dess koordinater linjens ekvation $y = \frac{1}{2}x + 1$. Punkten P kan då skrivas

$$P = (x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2}x_0 + 1\right).$$

Avståndet från punkten P till punkterna
$A = (0,-3)$ och $B = (4,1)$ är lika stora, vilket ger ekvationen

$$|PA| = |PB|$$

$$\sqrt{(x_0-0)^2+\left(\frac{1}{2}x_0+1-(-3)\right)^2} = \sqrt{(x_0-4)^2+\left(\frac{1}{2}x_0+1-(-1)\right)^2}$$

$$\underbrace{\sqrt{x_0{}^2+\left(\frac{1}{2}x_0+4\right)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{(x_0-4)^2+\left(\frac{1}{2}x_0+2\right)^2}}_{\geq 0} \qquad \Big|(\ )^2$$

$$x_0{}^2+\frac{1}{4}x_0{}^2+4x_0+16 = x_0{}^2-8x_0+16+\frac{1}{4}x_0{}^2+2x_0+4$$

$$\frac{5}{4}x_0{}^2+4x_0+16 = \frac{5}{4}x_0{}^2-6x_0+20$$

$$10x_0 = 4$$

$$x_0 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}x_0+1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+1 = 1\frac{1}{5}$$

Dvs. punkten är $\left(\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5}\right)$.

b) En godtycklig punkt (x_0, y_0) på bisektrisen till en konvex vinkel har samma avstånd till vartdera vinkelbenet. Vi får ekvationen

$$\frac{|3x_0+4y_0-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4x_0-3y_0+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$\frac{|3x_0+4y_0-1|}{5} = \frac{|4x_0-3y_0+5|}{5} \qquad \Big|\cdot 5$$

$$|3x_0+4y_0-1| = |4x_0-3y_0+5| \qquad \Big| |a|=|b| \Leftrightarrow a=b \text{ eller } a=-b$$

$$3x_0+4y_0-1 = 4x_0-3y_0+5 \quad \text{eller} \quad 3x_0+4y_0-1 = -(4x_0-3y_0+5)$$

$$3x_0+4y_0-1 = 4x_0-3y_0+5 \quad \text{eller} \quad 3x_0+4y_0-1 = -4x_0+3y_0-5$$

$$-x_0+7y_0-6=0 \quad \text{eller} \quad 7x_0+y_0+4=0$$

$$x_0-7y_0+6=0 \quad \text{eller} \quad 7x_0+y_0+4=0$$

Lösningarna är de punkter (x_0, y_0), som uppfyller ekvationen $x_0-7y_0+6=0$ eller $7x_0+y_0+4=0$.
Om vi betecknar lösningspunkterna (x, y), så är lösningen linjerna $x-7y+6=0$ och $7x+y+4=0$.

Svar a) Punkten är $\left(\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5}\right)$.

b) Bisektriserna är $x-7y+6=0$ och $7x+y+4=0$.

4

a)

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1^2 \quad \text{cirkel}$$

b)

$$3^2 x - 4^2 y + 5^2 = 0$$
$$9x - 16y + 25 = 0 \qquad \text{linje}$$

c)

$$3x^2 + 3y^2 + 6y + 9 = 0 \quad \Big| :3$$
$$x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0$$
$$x^2 + \left(y^2 + 2y + 1\right) = -3 + 1$$
$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+1)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-2}_{<0}$$

Eftersom högra ledet är $-2 < 0$ och vänstra ledet är ≥ 0, finns det ingen punkt som uppfyller ekvationen.
Dvs. ekvationen saknar graf

d)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = 9$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = 9$$
$$(x-2y)^2 = 9$$
$$x - 2y = 3 \text{ eller } x - 2y = -3$$
$$x - 2y - 3 = 0 \text{ eller } x - 2y + 3 = 0 \text{ två linjer}$$

e)

$$\underbrace{\frac{(x-1)^2}{2^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{(y-5)^2}{3^2}}_{\geq 0} = 0$$

Ekvationen är uppfylld endast om

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{(y-5)^2}{3^2} = 0$$
$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{och} \quad (y-5)^2 = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{och} \quad y - 5 = 0$$
$$x = 1 \quad \text{och} \quad y = 5$$

Dvs. grafen till ekvationen är punkten $(1,5)$.

f)

$$6x^2 - 3y = 0$$
$$3y = 6x^2$$
$$y = 2x^2$$ en parabel som öppnar sig uppåt

g)

$$y^2 - 3y - x = 3$$
$$x = y^2 - 3y - 3$$ en parabel som öppnar sig åt höger

Svar a) en cirkel

b) en linje

c) graf saknas

d) två linjer

e) punkten (1, 5)

f) en parabel som öppnar sig uppåt

g) en parabel som öppnar sig åt höger

5

Alternativ 1

Vi väljer en godtycklig punkt $P = (x_0, y_0)$ på linjen $3x - 2y = 1$. Eftersom punkten P ligger på linjen, uppfyller dess koordinater linjens ekvation $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Dvs. punkten $P = \left(x_0, \frac{3}{2}x_0 - \frac{1}{2}\right)$.

Avståndet från punkten P till linjen $5x - y + 3 = 0$ är

$$d_1 = \frac{\left|5x_0 - 1\cdot\left(\frac{3}{2}x_0 - \frac{1}{2}\right) + 3\right|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|3\frac{1}{2}x_0 + 3\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{26}}$$

Avståndet från punkten P till linjen $y = 5x + 7$, dvs. till linjen $5x - y + 7 = 0$ är

$$d_2 = \frac{\left|5x_0 - 1\cdot\left(\frac{3}{2}x_0 - \frac{1}{2}\right) + 7\right|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|3\frac{1}{2}x_0 + 7\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{26}}$$

Vi får ekvationen

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{\left|3\frac{1}{2}x_0 + 3\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{26}} = \frac{\left|3\frac{1}{2}x_0 + 7\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{26}} \qquad \Big| \cdot \sqrt{26}$$

$$\left|3\frac{1}{2}x_0 + 3\frac{1}{2}\right| = \left|3\frac{1}{2}x_0 + 7\frac{1}{2}\right| \qquad \Big| \; |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ eller } a = -b$$

$$3\frac{1}{2}x_0 + 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}x_0 + 7\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad 3\frac{1}{2}x_0 + 3\frac{1}{2} = -\left(3\frac{1}{2}x_0 + 7\frac{1}{2}\right)$$

$$0 = 4 \quad \text{eller} \quad 3\frac{1}{2}x_0 + 3\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}x_0 - 7\frac{1}{2}$$

alltid falsk

ingen lösning

$$7x_0 = -11$$

$$x_0 = -\frac{11}{7} = -1\frac{4}{7}$$

$$y_0 = \frac{3}{2}x_0 - \frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{11}{7}\right) - {}^{7)}\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{33}{14} - \frac{7}{14} = -\frac{40}{14}$$

$$= -\frac{20}{7} = -2\frac{6}{7}$$

Punkten är $\left(-1\frac{4}{7}, -2\frac{6}{7}\right)$.

Alternativ 2

Vi skriver om ekvationen för linjen $y = 5x + 7$ till allmän form.

$$y = 5x + 7$$
$$5x - y + 7 = 0$$

Linjerna $l_1:\ 5x - y + 3 = 0$ och $l_2:\ 5x - y + 7 = 0$ är parallella men sammanfaller inte.

Vi bestämmer ekvationen för en linje l_3 som är parallell med linjerna l_1 och l_2 samt vars punkter ligger lika långt från båda linjerna l_1 och l_2.
Vi väljer en godtycklig punkt $P = (x_0, y_0)$ från linjen l_3.
Vi får ekvationen

$$\frac{|5x_0 - y_0 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{|5x_0 - y_0 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} \qquad \Big| \cdot \sqrt{26}$$

$$|5x_0 - y_0 + 3| = |5x_0 - y_0 + 7| \qquad \Big| \; |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$5x_0 - y_0 + 3 = 5x_0 - y_0 + 7 \quad \text{eller} \quad 5x_0 - y_0 + 3 = -(5x_0 - y_0 + 7)$$

$$3 = 7 \quad \text{eller} \quad 5x_0 - y_0 + 3 = -5x_0 + y_0 - 7$$

alltid falsk

ingen lösning

$$10x_0 - 2y_0 + 10 = 0 \qquad \Big| :2$$

$$5x_0 - y_0 + 5 = 0$$

Lösningen är de punkter (x_0, y_0), som uppfyller ekvationen
$5x_0 - y_0 + 5 = 0$.
Om lösningspunkterna betecknas (x, y), så är lösningen linjen
$5x - y + 5 = 0$.

Den sökta punkten ligger på linjen $l_4:\ 3x - 2y = 1$, vilket ger att punktens koordinater också uppfyller ekvationen för linjen l_4.

Den punkt som uppfyller ekvationen får både l_3 och l_4 är linjernas skärningspunkt.
Vi bestämmer skärningspunkten genom att lösa ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 5x - y + 5 = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y + 5 = 0 \\ 3x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \cdot 3 \\ \cdot(-5) \end{array} \quad \begin{array}{|l} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$+\begin{cases} 15x - 3y + 15 = 0 \\ -15x + 10y + 5 = 0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 10x - 2y + 10 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$7y + 20 = 0 \qquad 7x + 11 = 0$$

$$y = -\frac{20}{7} \qquad x = -\frac{11}{7}$$

$$y = -2\frac{6}{7} \qquad x = -1\frac{4}{7}$$

Punkten är $\left(-1\frac{4}{7}, -2\frac{6}{7}\right)$.

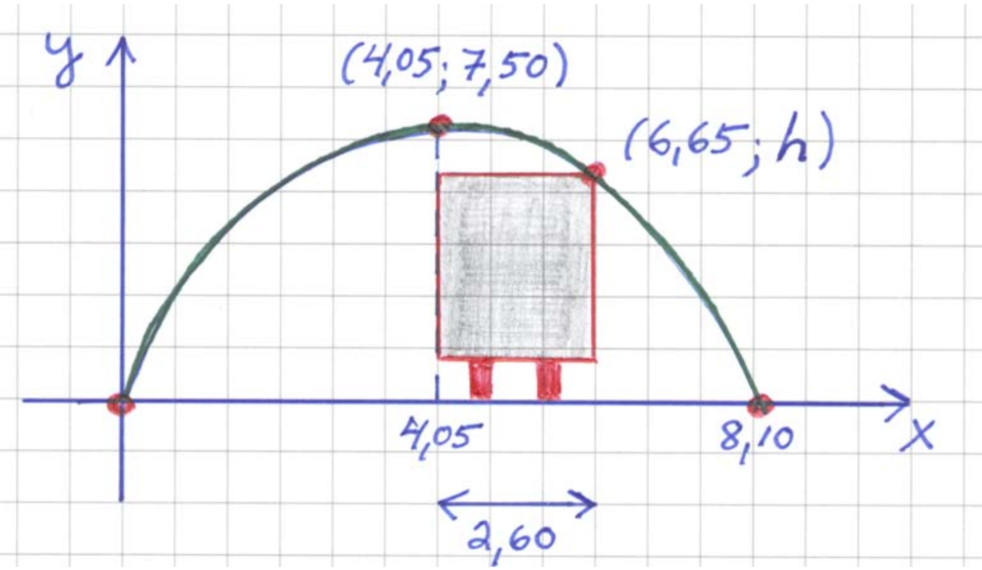
Svar Punkten är $\left(-1\frac{4}{7}, -2\frac{6}{7}\right)$.

Anmärkning

I alternativ 2 skulle man också ha erhållit den linje som är parallell med linjerna $l_1:\ 5x - y + 3 = 0$ och $l_2:\ 5x - y + 7 = 0$ genom att man skulle ha betecknat linjen med $l_3:\ 5x - y + c = 0$ och utnyttjat att linjen ligger på samma avstånd till linjerna l_1 och l_2.

6.

Vi undersöker problemet i ett *xy*-koordinatsystem. Axlarnas enhet är meter.



Ekvationen för en parabel som öppnar sig neråt är, utgående från nollställena,

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),\ a < 0 \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 8{,}1 \end{array} \right.$$

$$y = a(x - 0)(x - 8{,}1)$$

$$y = ax(x - 8{,}1)$$

Punkten $(4{,}05\,;\,7{,}5)$ ligger på parabeln, vilket ger ekvationen

$$7{,}5 = a \cdot 4{,}05 \cdot (4{,}05 - 8{,}1)$$

$$7{,}5 = -16{,}4025a$$

$$a = -\frac{7{,}5}{16{,}4025} = -\frac{75\,000}{164\,025} = -\frac{1\,000}{2\,187}(\approx -0{,}4572)$$

Dvs. parabelns ekvation är

$$y = -\frac{1\,000}{2\,187}x(x - 8{,}1) \qquad \left(y \approx -0{,}4572x(x - 8{,}1)\right)$$

Vi bestämmer långtradarens höjd h genom att sätta in variabelvärdet $x = 6{,}65$ i parabelns ekvation.

$$h = -\frac{1\,000}{2\,187} \cdot 6{,}65 \cdot (6{,}65 - 8{,}1) = 4{,}409... \approx 4{,}4\ (\text{m})$$

Svar Långtradarens höjd är högst 4,4 meter.

7

Vi skriver om ekvationen i medelpunktsform.

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = 0$$
$$(x+2)^2 - 2^2 + (y-1)^2 - 1^2 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

Medelpunkten är $(-2,1)$ och radien är $\sqrt{5}$.

Vi bildar en ekvation för diametern AB. Diametern går genom punkten $A=(-1,3)$ och medelpunkten $(-2,1)$. Riktningskoefficienten är

$$k_{AB} = \frac{3-1}{-1-(-2)} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \left| \; k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right.$$

och linjens ekvation är

$$y - 3 = 2(x+1) \qquad \left| \begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0) \\ k = 2,\ (x_0, y_0) = (-1,3) \end{array} \right.$$
$$y = 2x + 2 + 3$$
$$y = 2x + 5$$

Vi bestämmer diameterns och cirkelns skärningspunkter genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \qquad \left| \text{ Insättning i ekvation } (1). \right.$$

$$x^2 + (2x+5)^2 + 4x - 2(2x+5) = 0$$
$$x^2 + 4x^2 + 20x + 25 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 10 = 0$$
$$5x^2 + 20x + 15 = 0 \qquad |:5$$
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$
$$x = \frac{-6}{2} = -3 \text{ eller } x = \frac{-2}{2} = -1$$

Dvs. punkten B har x-koordinaten $x = -3$. Genom att sätta in värdet i ekvationen för diametern (2) får vi att

$$y = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$$

Dvs. punkten $B = (-3,-1)$.

Tangenten är vinkelrät mot radien som ritas till tangeringspunkten. Eftersom riktningskoefficienten för diametern AB och radien är 2, så får vi att riktningskoefficienten för tangenten genom punkten B är $-\frac{1}{2}$.

Den sökta tangenten är

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-(-3))$$
$$y+1=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$
$$y=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-1$$
$$y=-\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}$$

Tangentens ekvation i allmän form är

$$y=-\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2} \qquad \Big|\cdot 2$$
$$2y=-x-5$$
$$x+2y+5=0$$

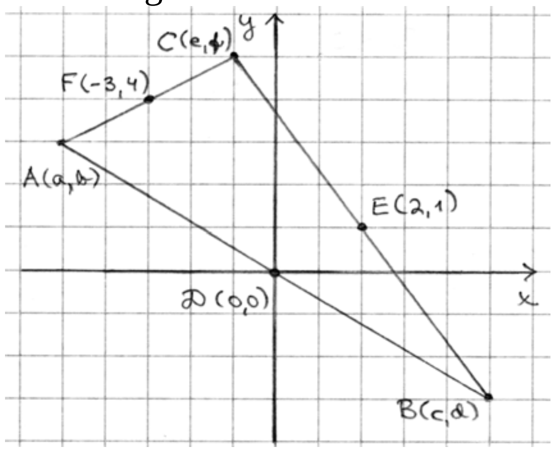
Svar $x+2y+5=0$

$\left(y=-\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}\right)$

8

Vi betecknar triangelns hörn med
$A=(a,b)$, $B=(c,d)$ och $C=(e,f)$.

Vi ritar en figur



Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2}=0 \\ \frac{b+d}{2}=0 \\ \frac{a+e}{2}=-3 \\ \frac{b+f}{2}=4 \\ \frac{c+e}{2}=2 \\ \frac{d+f}{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ a+e=-6 \\ b+f=8 \\ c+e=4 \\ d+f=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \begin{cases} a=-c & \big|\ \text{Insättning i ekvation } (3). \\ b=-d & \big|\ \text{Insättning i ekvation } (4). \\ a+e=-6 \\ b+f=8 \\ c+e=4 \\ d+f=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (7) \\ (8) \\ (5) \\ (6) \end{array} \begin{cases} -c+e=-6 \\ -d+f=8 \\ c+e=4 \\ d+f=2 \end{cases}$$

Vi adderar ekvationerna (7) och (5) samt (8) och (6).

$$+\begin{cases} -c+e=-6 \\ c+e=4 \end{cases} \qquad +\begin{cases} -d+f=8 \\ d+f=2 \end{cases}$$

$$2e=-2 \qquad 2f=10$$

$$e=-1 \qquad f=5$$

Vi sätter in $e=-1$ i ekvationerna (3) och (5) samt $f=5$ i ekvationerna (4) och (6).

$$a-1=-6$$
$$a=-5$$

$$c-1=4$$
$$c=5$$

$$b+5=8$$
$$b=3$$

$$d+5=2$$
$$d=-3$$

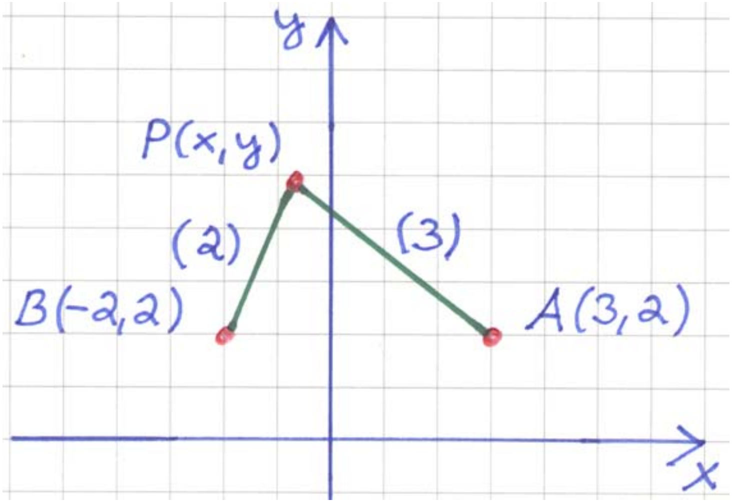
Dvs. hörnen är

$A=(-5,3)$, $B=(5,-3)$ och $C=(-1,5)$

Svar Triangelns hörn är $(-5,3)$, $(5,-3)$ och $(-1,5)$.

9

$A=(3,2)$
$B=(-2,2)$
$P=(x,y)$
$PA:PB=3:2$



$$\frac{PA}{PB}=\frac{3}{2}$$
$$2PA=3PB$$

$$2\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{[x-(-2)]^2+(y-2)^2}$$

$$\underbrace{2\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}}_{\geq 0}=\underbrace{3\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}}_{\geq 0}$$ | Om $a\geq 0$ och $b\geq 0$, så är $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$.

$$\left(2\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(3\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}\right)^2$$ | $(ab)^2=a^2b^2$, $(\sqrt{a})^2=a$

$$4\left[(x-3)^2+(y-2)^2\right]=9\left[(x+2)^2+(y-2)^2\right]$$

$$4(x-3)^2+4(y-2)^2=9(x+2)^2+9(y-2)^2$$

$$4(x-3)^2=9(x+2)^2+5(y-2)^2$$

$$4(x^2-6x+9)=9(x^2+4x+4)+5(y^2-4y+4)$$

$$4x^2-24x+\cancel{36}=9x^2+36x+\cancel{36}+5y^2-20y+20$$

$$5x^2+60x+5y^2-20y+20=0$$

$$x^2+12x+y^2-4y+4=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 6+6^2-6^2+y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2=0$$

$$(x+6)^2-6^2+(y-2)^2=0$$

$$(x+6)^2+(y-2)^2=6^2$$

Svar Punkten P beskriver en cirkel som har medelpunkten $(-6,2)$ och radien 6.

10

Vi bestämmer linjernas skärningspunkter.

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -3x \end{cases}$$

$3x = -3x$

$6x = 0$

$x = 0,$ vilket ger

$y = 0$

Vi får punkten $O = (0,0)$.

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = x + 2t \end{cases}$$

$3x = x + 2t$

$2x = 2t$

$x = t,$ vilket ger

$y = 3t$

Vi får punkten $A = (t, 3t)$.

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x + 2t \end{cases}$$

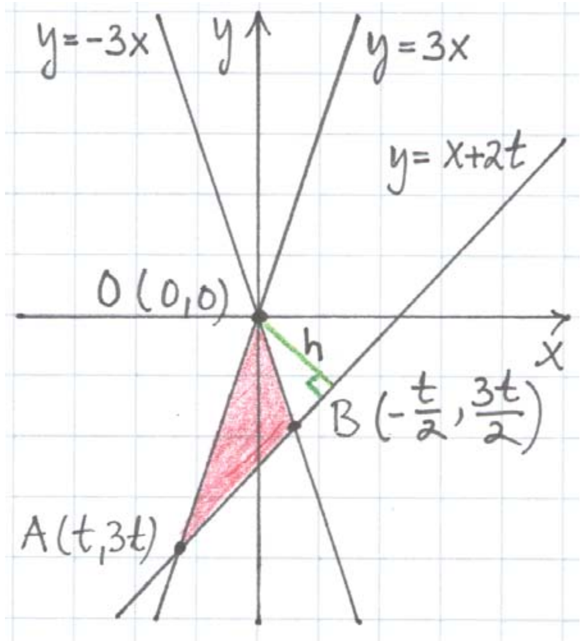
$-3x = x + 2t$

$-4x = 2t$

$x = -\frac{t}{2},$ vilket ger

$y = \frac{3t}{2}$

Vi får punkten $B = \left(-\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right)$.



Basen AB i triangeln OAB har längden

$$|AB| = \sqrt{\left(-\frac{t}{2}-t\right)^2 + \left(\frac{3t}{2}-3t\right)^2} \qquad \Big| \; d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2 y_1)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3t}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9t^2}{4} + \frac{9t^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9t^2}{2}}$$

$$= \frac{3|t|}{\sqrt{2}}$$

Höjden h i triangeln får vi genom att bestämma avståndet från origo till linjen $y = x + 2t$.

$$y = x + 2t$$

$$x - y + 2t = 0$$

$$h = \frac{|0-0+2t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \qquad \Big| \; d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|2t|}{\sqrt{2}}$$

Arean av triangeln OAB är

$$\frac{|AB| \cdot h}{2}$$

$$= \frac{\frac{3|t|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|2t|}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{6t^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2}$$

$$= \frac{6t^2}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{3t^2}{2}$$

Eftersom arean är 24 får vi ekvationen

$$\frac{3t^2}{2} = 24 \qquad \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

Svar $t = -4$ eller $t = 4$