

Övningsprov 1

1.

Enligt definitionen på skalär produkt är

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\left| \begin{array}{l} |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \end{array} \right.$$

$$= \frac{6}{5 \cdot 4}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) &= 72,542\dots^\circ \\ &\approx 73^\circ \end{aligned}$$

Svar: 73°

2.

a) Punkten $A = (-7, 8)$

Ortsvektorn är

$$\vec{OA} = -7\vec{i} + 8\vec{j}$$

Ortsvektorns längd är

$$\begin{aligned} |\vec{OA}| &= \sqrt{(-7)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{49 + 64} \\ &= \sqrt{113} \end{aligned}$$

Vi betecknar

$$\vec{OA} = \vec{a}, \sphericalangle(\vec{i}, \vec{a}) = \alpha, \sphericalangle(-\vec{i}, \vec{a}) = \beta$$

$$\tan \beta = \frac{8}{7}$$

$$\beta = 48,81\dots^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 131,18\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 131^\circ$$

b) Punkten $B = (0, -10)$

Ortsvektorn är

$$\vec{OB} = -10\vec{j}$$

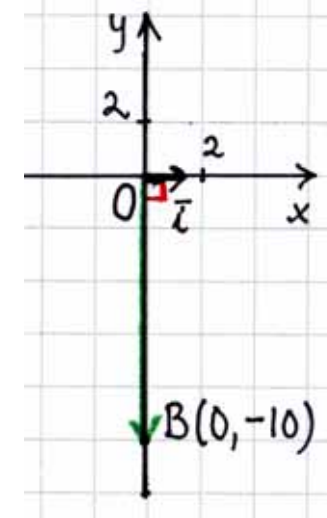
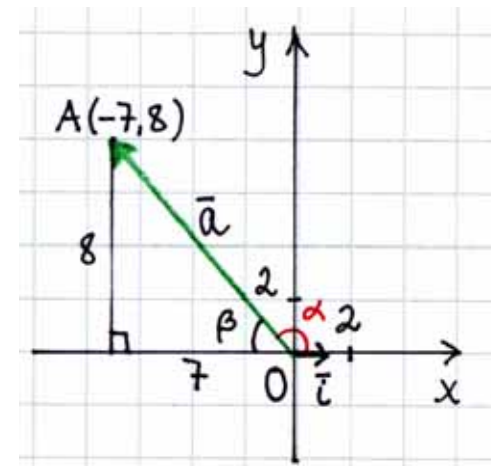
Ortsvektorns längd är $|\vec{OB}| = 10$

Vinkeln är

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\vec{OB}, \vec{i}) &= \sphericalangle(-10\vec{j}, \vec{i}) \\ &= \sphericalangle(-\vec{j}, \vec{i}) = 90^\circ \end{aligned}$$

Svar: a) $-7\vec{i} + 8\vec{j}$, $\sqrt{113}$, 131°

b) $-10\vec{j}$, 10, 90°



3.

Vi måste bestämma reella tal r och s så att

$$\begin{aligned} 9\bar{u} - 31\bar{v} &= r(3\bar{u} - 5\bar{v}) + s(-\bar{u} + 7\bar{v}) \\ &= 3r\bar{u} - 5r\bar{v} - s\bar{u} + 7s\bar{v} \\ &= (3r - s)\bar{u} + (-5r + 7s)\bar{v} \end{aligned}$$

Uppdelningen i komponenter är entydig i en bas vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 9 = 3r - s \\ -31 = -5r + 7s \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} s = 3r - 9 \end{cases}$ | Insättning i ekvation (2).

(2) $\begin{cases} -31 = -5r + 7s \end{cases}$

$$-31 = -5r + 7(3r - 9)$$

$$-31 = -5r + 21r - 63$$

$$32 = 16r$$

$$r = 2$$

| Insättning i ekvation (1).

$$s = 3 \cdot 2 - 9$$

$$s = -3$$

Svar: $9\bar{u} - 31\bar{v} = 2(3\bar{u} - 5\bar{v}) - 3(-\bar{u} + 7\bar{v})$

4.

En normalvektor till planet $ax + by + cz + d = 0$ är

$$\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}.$$

En normalvektor till planet

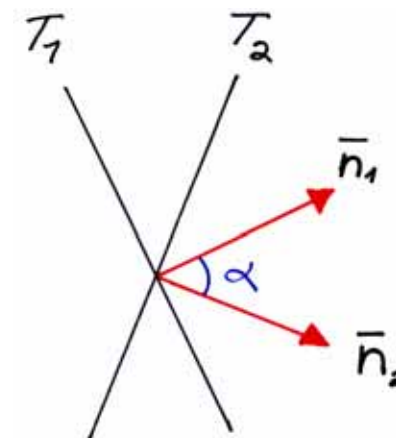
$T_1: x + y + z = 1$ är då

$$\bar{n}_1 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

och en normalvektor till planet

$T_2: 2y + z = 0$ är

$$\bar{n}_2 = 2\bar{j} + \bar{k}$$



Vinkeln mellan normalvektorerna får vi med den skalära produkten.

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = |\bar{n}_1| |\bar{n}_2| \cos \sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$$

$$\cos \sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| |\bar{n}_2|} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right.$$

$$\cos \sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\cos \sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 39,231\dots^\circ < 90^\circ$$

$$\sphericalangle(T_1, T_2) = 39,231\dots^\circ \approx 39^\circ$$

Svar: 39°

5.

a) Enligt definitionen är $\bar{b}^0 = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ vilket ger att

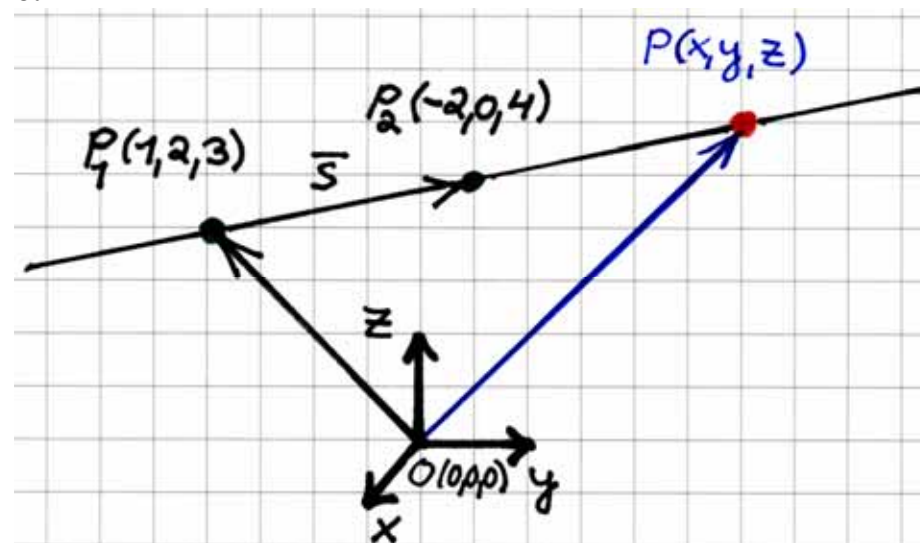
$$\begin{aligned} \bar{b} &= |\bar{b}| \bar{b}^0 & |\bar{b}| &= 20, \bar{a}^0 = \bar{b}^0 \\ &= 20 \bar{a}^0 \\ &= 20 \cdot \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a} & |\bar{a}| &= 15 \\ &= 20 \cdot \frac{1}{15} \bar{a} \\ &= \frac{4}{3} \bar{a} \end{aligned}$$

b) På motsvarande sätt får vi om $\bar{a} \uparrow \downarrow \bar{b}$ att $\bar{b}^0 = -\bar{a}^0$.

$$\begin{aligned} \bar{b} &= |\bar{b}| \bar{b}^0 \\ &= 20 \cdot (-\bar{a}^0) \\ &= -20 \cdot \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a} \\ &= -\frac{4}{3} \bar{a} \end{aligned}$$

Svar: a) $\frac{4}{3} \bar{a}$ b) $-\frac{4}{3} \bar{a}$

6.



a) Ortsvektorn för en godtycklig punkt $P = (x, y, z)$ på linjen är

$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + r \bar{s}, \quad r \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{aligned} \bar{s} &= \overline{P_1 P_2} \\ &= (-2-1)\bar{i} + (0-2)\bar{j} + (4-3)\bar{k} \\ &= -3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} \end{aligned} \right.$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} + r(-3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (1-3r)\bar{i} + (2-2r)\bar{j} + (3+r)\bar{k}$$

Detta är ekvationen för linjen i vektorform.

b) Eftersom uppdelningen i komponenter är entydig i en bas får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 1 - 3r \\ y = 2 - 2r \\ z = 3 + r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Detta är ekvationen för linjen i *parameterform*.

c) Vi eliminerar parametern r ur ekvationen i parameterform.

Eftersom

$$\begin{cases} r = \frac{x-1}{-3} \\ r = \frac{y-2}{-2} \\ r = z-3 \end{cases}$$

får vi att

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-2} = z-3$$

Detta är *linjens ekvation*.

d) Vi undersöker om punkten $(10,8,1)$ uppfyller linjens ekvation.

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{10-1}{-3} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\frac{y-2}{-2} = \frac{8-2}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$z-3 = 1-3 = -2 \neq -3$$

Dvs. punkten $(10,8,1)$ ligger inte på linjen.

Svar:

a) $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} + r(-3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}), r \in \mathbb{R}$

b)
$$\begin{cases} x = 1 - 3r \\ y = 2 - 2r \\ z = 3 + r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

c)
$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-2} = z-3$$

d) Punkten $(10,8,1)$ ligger inte på linjen.

7.

Vi antar att den sökta punkten är $P = (x, y)$.

De givna punkterna är

$$A = (-1, 1)$$

$$B = (1, -2)$$

$$C = (2, 1)$$

$$D = (2, 3)$$

$$E = (-2, -2)$$

Villkor:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} (-1-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (1-x)\vec{i} + (-2-y)\vec{j} + (2-x)\vec{i} + \\ (1-y)\vec{j} + (2-x)\vec{i} + (3-y)\vec{j} + (-2-x)\vec{i} + (-2-y)\vec{j} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cancel{1-x} + \cancel{1-x} + 2-x + 2-x)\vec{i} + \\ (1-y-2-y+1-y+3-y-2-y)\vec{j} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$(2-5x)\vec{i} + (1-5y)\vec{j} = \vec{0}$$

Vektorn är nollvektorn om

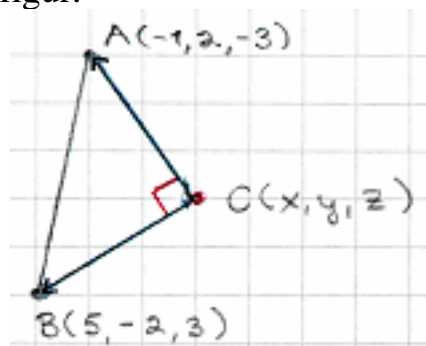
$$\begin{cases} 2-5x=0 \\ 1-5y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Svar: Punkten $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

8. Anta att den punkt från vilken sträckan AB syns i rät vinkel är $C = (x, y, z)$.

Vi ritar en figur.



Vektorerna \overrightarrow{CA} och \overrightarrow{CB} är vinkelräta mot varandra, dvs. $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$, om och endast om $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Eftersom

$$\overrightarrow{CA} = (-1-x)\vec{i} + (2-y)\vec{j} + (-3-z)\vec{k}$$

och

$$\overrightarrow{CB} = (5-x)\vec{i} + (-2-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k}$$

får vi ekvationen

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \\ (-1-x)(5-x) + (2-y)(-2-y) + (-3-z)(3-z) &= 0 \\ -5 + x - 5x + x^2 + (-y+2)(-y-2) + (-2-3)(-z+3) &= 0 \\ x^2 - 4x - 5 + y^2 - 4 + z^2 - 9 &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 + z^2 - 18 &= 0 \end{aligned}$$

Ekvationen ser ut som ekvationen för en sfär. Vi skriver om ekvationen till medelpunktsform med hjälp av faktorisering.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 + z^2 - 18 &= 0 \\ (x-2)^2 - 2^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 - 18 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 &= 18 + 2^2 \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 &= (\sqrt{22})^2 \end{aligned}$$

Den erhållna ekvationen är av formen

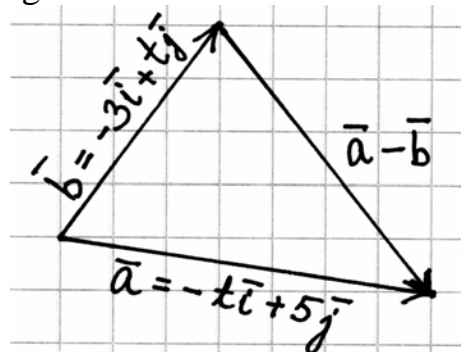
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$, vilket ger att det är ekvationen för en sfär med medelpunkten $(2, 0, 0)$ och radien $\sqrt{22}$.

Dvs. de punkter från vilka sträckan AB syns i rät vinkel ligger på ytan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 18 = 0$.

Svar: På ytan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 18 = 0$.

9.

Vi ritar en figur.



Den tredje sidan i triangeln är vektorn

$$\begin{aligned} \bar{a} - \bar{b} &= -t\bar{i} + 5\bar{j} - (-3\bar{i} + t\bar{j}) \\ &= -t\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{i} - t\bar{j} \\ &= (3-t)\bar{i} + (5-t)\bar{j} \end{aligned}$$

Längden av vektorn $\bar{a} - \bar{b}$ är

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(3-t)^2 + (5-t)^2} \quad \left| |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \right.$$

Eftersom $|\bar{a} - \bar{b}| = 10$ får vi ekvationen

$$\underbrace{\sqrt{(3-t)^2 + (5-t)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{10}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$(3-t)^2 + (5-t)^2 = 10^2$$

$$9 - 6t + t^2 + 25 - 10t + t^2 = 100$$

$$2t^2 - 16t + 34 - 100 = 0$$

$$2t^2 - 16t - 66 = 0 \quad | :2$$

$$t^2 - 8t - 33 = 0$$

$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-33)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 132}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 14}{2}$$

$$t = -3 \text{ eller } t = 11$$

Om $t = -3$ så är vektorn \bar{b}

$$\bar{b} = -3\bar{i} - 3\bar{j} = -3(\bar{i} + \bar{j}), \text{ dvs. } \bar{b} = r(\bar{i} + \bar{j}) \text{ med } r = -3.$$

Då är $\bar{b} \parallel \bar{i} + \bar{j}$ vilket ger att värdet $t = -3$ inte duger.

Om $t = 11$ så är vektorn \bar{b}

$$\bar{b} = -3\bar{i} + 11\bar{j} \not\parallel \bar{i} + \bar{j}.$$

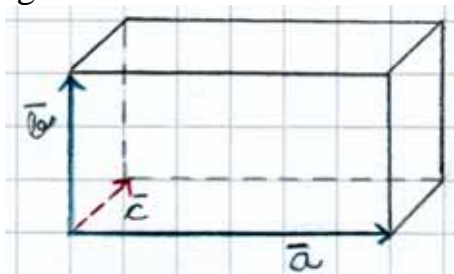
Dvs. värdet $t = 11$ duger.

Svar: $t = 11$

10.

Vi betecknar vektorn $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Vi ritar en figur.



Rätblockets volym är

$$V = abc = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$$

Vi beräknar längderna av sidorna \vec{a} , \vec{b} och \vec{c} .

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{vektorns längd} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \left| \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right.$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vektorerna \vec{a} , \vec{b} och \vec{c} utgör sidor i ett rätblock vilket ger att

$\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ och $\vec{b} \perp \vec{c}$. Då är $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ och $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Vi får ekvationerna

$$2x - 4y + 4z = 0 \quad \left| \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \right.$$

$$2x + 2y + z = 0 \quad \left| \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \right.$$

Volymen $V = 324$, vilket ger ekvationen

$$6 \cdot 3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 324 \quad \left| V = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| \right.$$

$$18\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 324 \quad \left| :18 \right.$$

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}_{\geq 0} = \underbrace{18}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \end{array} \right.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 324$$

Komponenterna för vektorn \vec{c} får vi ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1) & 2x - 4y + 4z = 0 \\ (2) & 2x + 2y + z = 0 \\ (3) & x^2 + y^2 + z^2 = 324 \end{cases}$$

Vi löser ut variablerna x och y ur ekvationerna (1) och (2) och skriver variablerna med hjälp av variabeln z .

$$\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 & \cdot 1 & \left| \cdot 1 \right. \\ 2x + 2y + z = 0 & \cdot 2 & \left| \cdot (-1) \right. \end{cases} \\ + \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 \\ 4x + 4y + 2z = 0 \end{cases} & + \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 \\ -2x - 2y - z = 0 \end{cases} \\ \hline 6x + 6z = 0 & -6y + 3z = 0 \\ (4) \quad x = -z & (5) \quad y = \frac{1}{2}z \end{array}$$

Insättning av $x = -z$ och $y = \frac{1}{2}z$ i ekvation (3) ger

$$(-z)^2 + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 + z^2 = 324$$

$$z^2 + \frac{1}{4}z^2 + z^2 = 324$$

$$\frac{9}{4}z^2 = 324 \quad \left| : \frac{9}{4} \right.$$

$$z^2 = 144$$

$$z = \pm 12$$

Insättning i ekvationerna
(4) och (5).

$$x = -z = -(\pm 12) = \mp 12$$

$$y = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(\pm 12) = \pm 6$$

Vektorn \vec{c} är då $\vec{c} = 12\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$ eller $\vec{c} = -12\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$

Svar: $\vec{c} = \pm(12\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k})$

Övningsprov 2

1.

a)

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-4\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{-4\vec{i} + 3\vec{j}}{5} = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

$$\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{6\vec{i} - 8\vec{j}}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{6\vec{i} - 8\vec{j}}{10} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

b) Anta att ruten är $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$.

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} = 15\vec{a}^0 + 5\vec{b}^0 \\ &= 15\left(-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) + 5\left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) \\ &= -12\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ &= -9\vec{i} + 5\vec{j} \end{aligned}$$

Ändpunkten $B = (-9, 5)$.

Svar: a) $\vec{a}^0 = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$, $\vec{b}^0 = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

b) $(-9, 5)$

2.

Vektorn

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}, \text{ vilket ger}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\bar{b} = -\bar{i} + t\bar{j}, \text{ vilket ger}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + t^2} = \sqrt{1+t^2}$$

a) Eftersom $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ får vi ekvationen

$$\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{13}}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$1+t^2 = 13$$

$$t^2 = 12$$

$$t = \pm\sqrt{12}$$

$$t = \pm 2\sqrt{3}$$

b) Vektorerna \bar{a} och \bar{b} är lika riktade om och endast om det existerar en reellt tal r , $r > 0$, så att

$$\bar{b} = r\bar{a}$$

$$-\bar{i} + t\bar{j} = r(2\bar{i} + 3\bar{j})$$

$$-\bar{i} + t\bar{j} = 2r\bar{i} + 3r\bar{j}$$

Uppdelningen i komponenter är entydig i en bas vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} -1 = 2r \\ t = 3r \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

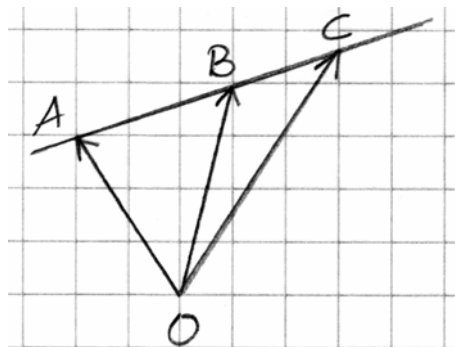
Eftersom $r = -\frac{1}{2} < 0$, är villkoret $r > 0$ inte uppfyllt och

vektorerna \bar{a} och \bar{b} är inte lika riktade. Då kan vi inte heller bestämma konstanten t .

Svar: a) $t = \pm 2\sqrt{3}$

b) Det finns inget värde på konstanten t så att $\bar{a} \uparrow \uparrow \bar{b}$.

3.
Vi ritat en figur.



Punkterna A , B och C ligger på samma linje om och endast om $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, dvs. om det existerar ett reellt tal $r \neq 0$, så att $\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{AB}$. Vi får vektorekvationen

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = r(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$$

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = r(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$-(-\bar{a} + 3\bar{b}) + (-11\bar{a} + k\bar{b}) = r(-(-\bar{a} + 3\bar{b}) + 4\bar{a} - 5\bar{b})$$

$$\bar{a} - 3\bar{b} - 11\bar{a} + k\bar{b} = r(\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{a} - 5\bar{b})$$

$$-10\bar{a} + (-3 + k)\bar{b} = r(5\bar{a} - 8\bar{b})$$

$$-10\bar{a} + (-3 + k)\bar{b} = 5r\bar{a} - 8r\bar{b}$$

Eftersom uppdelningen i komponenter är entydig i en bas får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} -10 = 5r \\ -3 + k = -8r \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} r = -2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -3 + k = -8r \end{cases}$$

$$-3 + k = -8 \cdot (-2)$$

$$k = 16 + 3$$

$$k = 19$$

| Insättning i ekvation (2).

Svar: $k = 19$

4.
 Vektorerna \bar{a} och \bar{b} är vinkelräta mot varandra, dvs. $\bar{a} \perp \bar{b}$, vilket ger $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Vi får ekvationen

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \bar{a} = -2\bar{i} + (2-t)\bar{j} + 2\bar{k} \\ \bar{b} = 10\bar{i} + (2+t)\bar{j} + 4t\bar{k} \end{array} \right.$$

$$-2 \cdot 10 + (2-t) \cdot (2+t) + 2 \cdot 4t = 0$$

$$-20 + 4 - t^2 + 8t = 0$$

$$-t^2 + 8t - 16 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$t^2 - 8t + 16 = 0 \quad | a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$(t-4)^2 = 0 \quad | \text{nollregeln för en produkt}$$

$$t - 4 = 0$$

$$t = 4$$

Dvs. vinkeln $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = 90^\circ$, om $t = 4$.

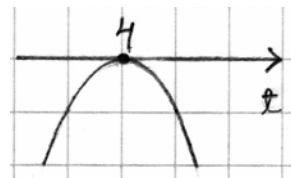
Bevis

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = -t^2 + 8t - 16$$

$$= -(t^2 - 8t + 16)$$

$$= -\underbrace{(t-4)^2}_{\geq 0} \leq 0$$

Graf:



Eftersom $\bar{a} \cdot \bar{b} \leq 0$ alltid, så är vinkeln $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ antingen rak eller trubbig.

Dvs. vinkeln $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ är inte spetsig för något värde på konstanten t . \square

Svar: Vektorerna är vinkelräta mot varandra om $t = 4$.

5.

Vi betecknar vektorn som utgår från origo med $x\bar{i} + y\bar{j}$.

Eftersom $|x\bar{i} + y\bar{j}| = |7\bar{i} - 11\bar{j}|$ får vi ekvationen

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{7^2 + (-11)^2}}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$x^2 + y^2 = 7^2 + (-11)^2$$

$$x^2 + y^2 = 170$$

Eftersom $x\bar{i} + y\bar{j} \perp 7\bar{i} - 11\bar{j}$ får vi ekvationen

$$(x\bar{i} + y\bar{j}) \cdot (7\bar{i} - 11\bar{j}) = 0$$

$$7x - 11y = 0$$

Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 170 \\ 7x - 11y = 0 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 170 \\ (2) \left\{ x = \frac{11}{7}y \right. \end{cases} \quad \left| \text{Insättning i ekvation (1).} \right.$$

$$\left(\frac{11}{7}y\right)^2 + y^2 = 170$$

$$\frac{121}{49}y^2 + y^2 = 170$$

$$\frac{170}{49}y^2 = 170$$

$$y^2 = 49$$

$$y = \pm 7 \quad \left| \text{Insättning i ekvation (2).} \right.$$

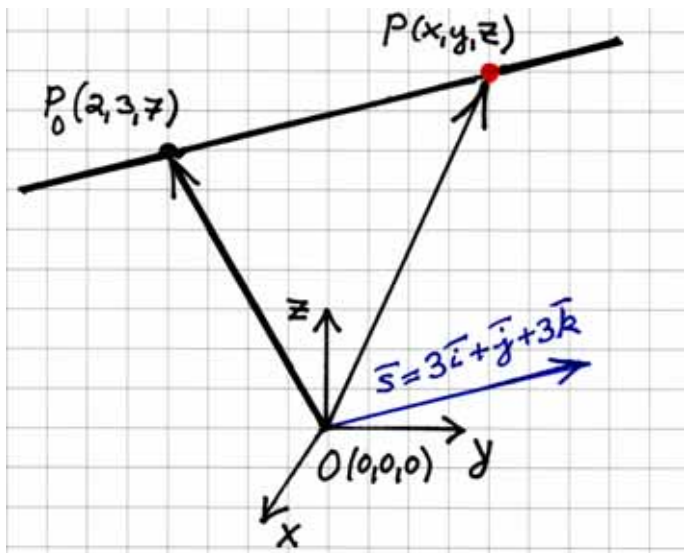
$$y = 7: \quad x = \frac{11}{7} \cdot 7 = 11$$

$$y = -7: \quad x = \frac{11}{7} \cdot (-7) = -11$$

Vi får vektorerna $11\bar{i} + 7\bar{j}$ och $-11\bar{i} - 7\bar{j}$.

Svar: $11\bar{i} + 7\bar{j}$ och $-11\bar{i} - 7\bar{j}$

6.



Ortsvektorn för en godtycklig punkt $P = (x, y, z)$ på linjen är

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + r\overrightarrow{s}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k} + r(3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}), \quad r \in \mathbb{R}$$

Uppdelningen i komponenter är entydig i en bas vilket ger

$$\begin{cases} x = 2 + 3r \\ y = 3 + r \\ z = 7 + 3r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Vi bestämmer skärningspunkten mellan linjen

$$\begin{cases} x = 2 + 3r \\ y = 3 + r \\ z = 7 + 3r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \text{ och planet } x + 2y + z = 1$$

genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1) & x = 2 + 3r \\ (2) & y = 3 + r \\ (3) & z = 7 + 3r \\ (4) & x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Insättning i ekvation (4).} \end{array} \right.$$

$$2 + 3r + 2(3 + r) + 7 + 3r = 1$$

$$8r = -14$$

$$r = -\frac{7}{4} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Insättning i ekvationerna (1), (2) och (3).} \end{array} \right.$$

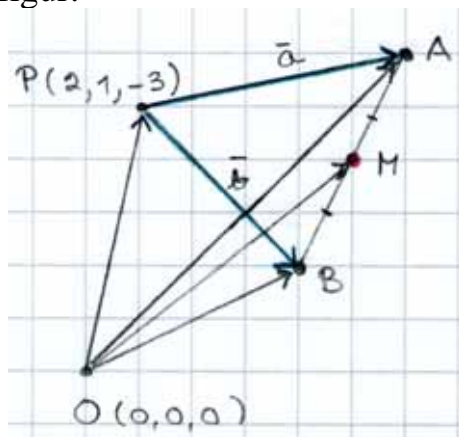
$$x = 2 + 3r = 2 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = -3\frac{1}{4}$$

$$y = 3 + r = 3 - \frac{7}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$z = 7 + 3r = 7 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 1\frac{3}{4}$$

Skärningspunkten mellan linjen och planet är $\left(-3\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}\right)$.

7.
 Vi betecknar ändpunkten för vektorn \bar{a} med bokstaven A ,
 ändpunkten för vektorn \bar{b} med bokstaven B och mittpunkten på
 sträckan AB med bokstaven M .
 Vi ritar en figur.



Ortsvektorn för punkten A är

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OP} + \bar{a} \\ &= 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} + 3\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k} \\ &= 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} \\ \bar{a} = 3\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k} \end{array} \right.$$

Dvs. punkten $A = (5, -2, -1)$.

Ortsvektorn för punkten B är

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OP} + \bar{b} \\ &= 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} + \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k} \\ &= 3\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} \\ \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k} \end{array} \right.$$

Dvs. punkten $B = (3, 2, -7)$.

Alternativ 1

Mittpunkt på sträckan AB är

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{5 + 3}{2}, \frac{-2 + 2}{2}, \frac{-1 + (-7)}{2} \right) = (4, 0, -4) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} (x_1, y_1, z_1) = (5, -2, -1) \\ (x_2, y_2, z_2) = (3, 2, -7) \end{array} \right.$$

Alternativ 2

Ortsvektorn för punkten M är

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} & \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} \\ \overrightarrow{AB} = (3-5)\bar{i} + (2-(-2))\bar{j} + (-7-(-1))\bar{k} \\ \quad = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k} \end{array} \right. \\ &= 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} + \frac{1}{2}(-2\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}) \\ &= 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} - \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k} \\ &= 4\bar{i} + 0\bar{j} - 4\bar{k} \end{aligned}$$

Dvs. punkten M är $(4, 0, -4)$.

Alternativ 3

Ortsvektorn för punkten M är enligt satsen om delning av en sträcka

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB}}{1+1} & \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} \\ \overrightarrow{OB} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k} \end{array} \right. \\ &= \frac{5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} + 3\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}}{2} \\ &= \frac{8\bar{i} + 0\bar{j} - 8\bar{k}}{2} = 4\bar{i} + 0\bar{j} - 4\bar{k} \end{aligned}$$

Dvs. punkten $M = (4, 0, -4)$.

Svar: Sträckans mittpunkt är $(4, 0, -4)$.

8.

a) Vi betecknar $\bar{s} = t\bar{a} - 3\bar{b}$. Vektorn \bar{s} är

$$\begin{aligned} \bar{s} &= t\bar{a} - 3\bar{b} & \left| \begin{array}{l} \bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k} \\ \bar{b} = 2\bar{j} - \bar{k} \end{array} \right. \\ &= t(\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}) - 3(2\bar{j} - \bar{k}) \\ &= t\bar{i} + 2t\bar{j} + 4t\bar{k} - 6\bar{j} + 3\bar{k} \\ &= t\bar{i} + (2t-6)\bar{j} + (4t+3)\bar{k} \end{aligned}$$

Längden av vektorn \bar{s} är

$$\begin{aligned} |\bar{s}| &= \sqrt{t^2 + (2t-6)^2 + (4t+3)^2} & \left| \begin{array}{l} \text{vektorns längd:} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right. \\ &= \sqrt{t^2 + 4t^2 - 24t + 36 + 16t^2 + 24t + 9} \\ &= \sqrt{21t^2 + 45} \end{aligned}$$

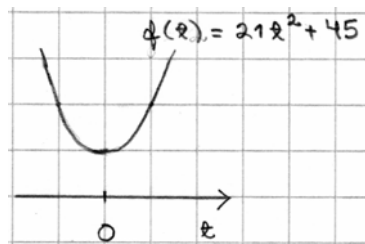
b) Värdet på längden är minst när radikanden är minst.

Alternativ 1

Grafen till radikanden $f(t) = 21t^2 + 45$ är en parabel som öppnar sig uppåt, vilket ger att radikanden får sitt minsta värde i parabelns topp.

Toppens t -koordinat är

$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 21} = 0$$



Toppens y -koordinat är

$$f(0) = 21 \cdot 0^2 + 45 = 45$$

Dvs. längdens minsta värde är

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

Alternativ 2

Vi undersöker vilka värden radikanden $21t^2 + 45$ kan erhålla.

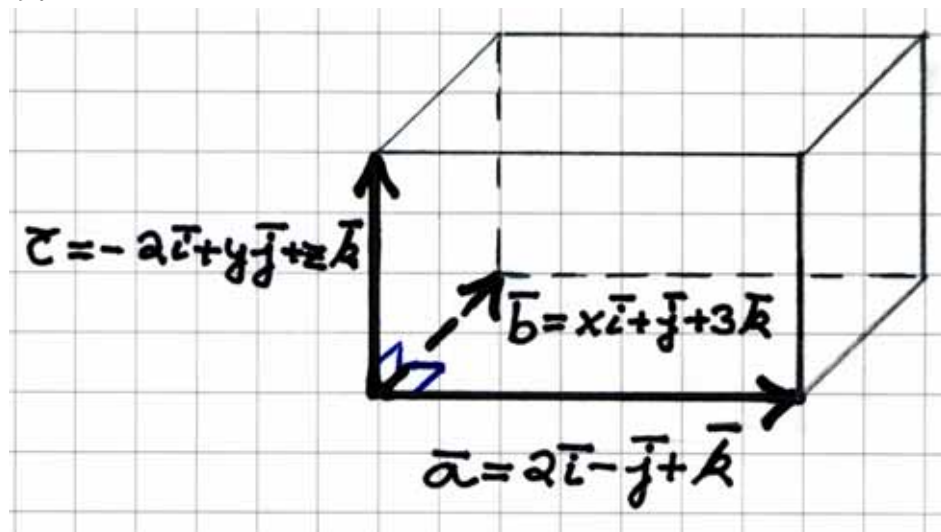
$$\underbrace{21t^2}_{\geq 0} + 45 \geq 45, \text{ vilket ger att}$$

radikandens minsta värde är 45

Dvs. längdens minsta värde är $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

- Svar: a) Vektorns längd är $\sqrt{21t^2 + 45}$.
 b) Längdens minsta värde är $3\sqrt{5}$.

9.



Kantvektorena är vinkelräta mot varandra, vilket ger

$$\begin{cases} \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \\ \bar{a} \cdot \bar{c} = 0 \\ \bar{b} \cdot \bar{c} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0 \\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ x \cdot (-2) + 1 \cdot y + 3 \cdot z = 0 \end{cases}$$

- (1) $x = -1$ | Insättning i ekvationerna (2) och (3).
 (2) $-y + z = 4$
 (3) $-2x + y + 3z = 0$

$$\begin{cases} -y + z = 4 \\ 2 + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} z = y + 4 \end{cases} \quad | \text{Insättning i ekvation (5).}$$

$$(5) \begin{cases} y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$y + 3(y + 4) = -2$$

$$4y = -14$$

$$y = -\frac{7}{2}$$

$$| \text{Insättning i ekvation (4).}$$

$$z = y + 4 = -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dvs. } \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{7}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Längderna av rätblockets kanter är

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{(-2)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 + \frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{66}{4}} = \frac{\sqrt{66}}{2} \end{aligned}$$

Rätblockets volym är

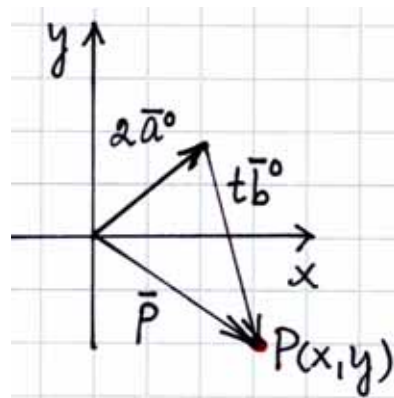
$$V = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{66}}{2} = \sqrt{66} \cdot \frac{\sqrt{66}}{2} = \frac{66}{2} = 33$$

Svar: $x = -1$, $y = -3\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$ och volymen är 33

10.

Anta att $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$, vilket ger

$$\begin{aligned} \bar{a}^0 &= \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{4\bar{i} + 3\bar{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\ &= \frac{4\bar{i} + 3\bar{j}}{5} = \frac{4}{5}\bar{i} + \frac{3}{5}\bar{j} \end{aligned}$$



Anta att $\bar{b} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$, vilket ger

$$\bar{b}^0 = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{5\bar{i} - 12\bar{j}}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{5\bar{i} - 12\bar{j}}{13} = \frac{5}{13}\bar{i} - \frac{12}{13}\bar{j}$$

Ortsvektorn för punkten P är

$$\bar{p} = 2\bar{a}^0 + t\bar{b}^0 = \frac{8}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j} + \frac{5t}{13}\bar{i} - \frac{12t}{13}\bar{j} = \left(\frac{8}{5} + \frac{5t}{13}\right)\bar{i} + \left(\frac{6}{5} - \frac{12t}{13}\right)\bar{j}$$

Dvs. $P = \left(\frac{8}{5} + \frac{5t}{13}, \frac{6}{5} - \frac{12t}{13}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Vi betecknar $P = (x, y)$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} + \frac{5t}{13} & | \cdot 65 \\ y = \frac{6}{5} - \frac{12t}{13} & | \cdot 65 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 65x = 104 + 25t & | \cdot 12 \\ 65y = 78 - 60t & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 780x - 300t = 1248 \\ 325y + 300t = 390 \end{cases}$$

$$780x + 325y = 1638 \quad | :13$$

$$60x + 25y = 126$$

$$60x + 25y - 126 = 0$$

Uttrycket är ekvationen för en linje.

Svar: Punkten är $\left(\frac{8}{5} + \frac{5t}{13}, \frac{6}{5} - \frac{12t}{13}\right)$ och punkten ritat linjen

$60x + 25y - 126 = 0$, då t får alla reella värden.

Övningsprov 3**1.**Vi betecknar $\vec{v} = -6\vec{a} + 5\vec{b}$.Eftersom $\vec{b} = -2\vec{a}$, så är

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -6\vec{a} + 5 \cdot (-2\vec{a}) \\ &= -6\vec{a} - 10\vec{a} \\ &= -16\vec{a}\end{aligned}$$

Längden av vektorn \vec{a} är

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{6^2 + 8^2} & \left| \begin{array}{l} \vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \\ |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right. \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

Dvs. längden av vektorn \vec{v} är

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= |-16\vec{a}| \\ &= |-16| \cdot |\vec{a}| \\ &= 16 \cdot |\vec{a}| \\ &= 16 \cdot 10 \\ &= 160\end{aligned}$$

Svar: $|-6\vec{a} + 5\vec{b}| = 160$ **2.****a)** Vektorerna \vec{a} och \vec{b} är vinkelräta mot varandra om och endast om

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + m\vec{j} \end{array} \right.$$

$$3 \cdot 2 + (-4) \cdot m = 0$$

$$6 - 4m = 0$$

$$m = \frac{6}{4}$$

$$m = \frac{3}{2}$$

$$m = 1\frac{1}{2}$$

b) Vektorerna \vec{a} och \vec{b} är lika riktade om och endast om det existerar ett reellt tal r , $r > 0$, så att

$$\vec{a} = r\vec{b} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + m\vec{j} \end{array} \right.$$

$$3\vec{i} - 4\vec{j} = r(2\vec{i} + m\vec{j})$$

$$3\vec{i} - 4\vec{j} = 2r\vec{i} + mr\vec{j}$$

Eftersom uppdelningen i komponenter är entydig i en bas får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3 = 2r \\ -4 = mr \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Insättning i ekvation (2).} \\ \text{Insättning i ekvation (1).} \end{array} \right.$$

$$-4 = m \cdot \frac{3}{2}$$

$$3m = -8$$

$$m = -\frac{8}{3}$$

$$m = -2\frac{2}{3}$$

Svar: a) $m = 1\frac{1}{2}$

b) $m = -2\frac{2}{3}$

3.

Vi måste bestämma reella tal r och s så att

$$-4\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} = r(-2\bar{i} + 3\bar{j}) + s(3\bar{i} + \bar{j})$$

$$-4\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} = -2r\bar{i} + 3r\bar{j} + 3s\bar{i} + s\bar{j}$$

$$-4\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} = (-2r + 3s)\bar{i} + (3r + s)\bar{j}$$

Uppdelningen i komponenter är entydig i en bas vilket ger

$$\begin{cases} -4 = -2r + 3s \\ \frac{1}{2} = 3r + s \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \end{array} \right.$$

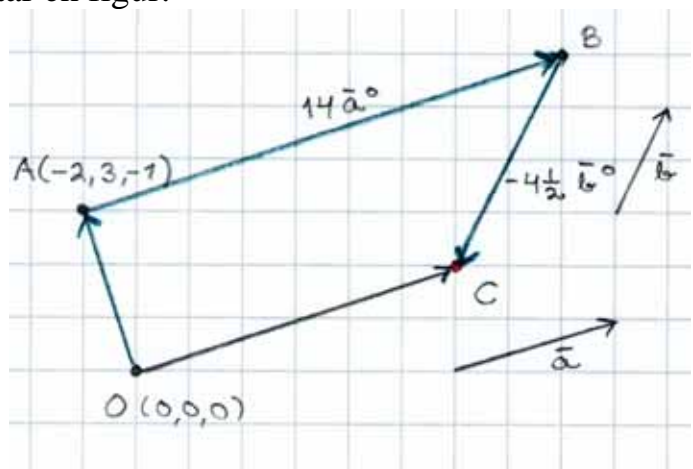
$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -12 = -6r + 9s \\ 1 = 6r + 2s \end{cases} \\ \hline -11 = 11s \\ s = -1 \end{array} \quad + \begin{cases} -4 = -2r + 3s \\ -\frac{3}{2} = -9r - 3s \end{cases} \\ \hline -\frac{11}{2} = -11r \\ r = \frac{1}{2}$$

Dvs. $-4\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} = \frac{1}{2}(-2\bar{i} + 3\bar{j}) + (-1)(3\bar{i} + \bar{j})$

Svar: $-4\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} = \frac{1}{2}(-2\bar{i} + 3\bar{j}) - (3\bar{i} + \bar{j})$

4.

Vi ritar en figur.



Vi bestämmer Ortsvektorn för punkten C för att få reda på punkten C :s koordinater. Vi bestämmer först den enhetsvektor \bar{a}^0 som har samma riktning som vektorn \bar{a} och den enhetsvektor $-\bar{b}^0$ som är motsatt riktad till vektorn \bar{b} .

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \quad \left| |\bar{a}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7 \right.$$

$$= \frac{6\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}}{7}$$

$$= \frac{6}{7}\bar{i} - \frac{3}{7}\bar{j} + \frac{2}{7}\bar{k}$$

$$-\bar{b}^0 = -\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left| |\bar{b}| = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9 \right.$$

$$= -\frac{-8\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}}{9}$$

$$= \frac{8}{9}\bar{i} - \frac{1}{9}\bar{j} + \frac{4}{9}\bar{k}$$

Ortsvektorn för punkten C är

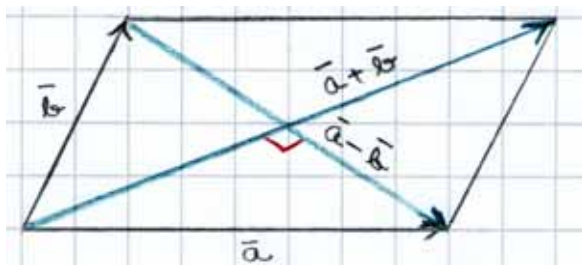
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \left| \begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k} \\ \overrightarrow{AB} &= 14\bar{a}^0 \\ \overrightarrow{BC} &= 4\frac{1}{2} \cdot (-\bar{b}^0) \end{aligned} \right. \\ &= -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k} + 14\left(\frac{6}{7}\bar{i} - \frac{3}{7}\bar{j} + \frac{2}{7}\bar{k}\right) + 4\frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\bar{i} - \frac{1}{9}\bar{j} + \frac{4}{9}\bar{k}\right) \\ &= -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k} + 12\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k} + 4\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j} + 2\bar{k} \\ &= 14\bar{i} - 3\frac{1}{2}\bar{j} + 5\bar{k} \end{aligned}$$

Dvs. punkten $C = \left(14, -3\frac{1}{2}, 5\right)$.

Svar: Vi kommer till punkten $\left(14, -3\frac{1}{2}, 5\right)$.

5.

Vi ritar en figur.



Diagonalvektorerna i parallelogrammen är

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= t\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k} + t\bar{i} - t\bar{j} - \bar{k} \\ &= 2t\bar{i} + (1-t)\bar{j} - 3\bar{k} \\ \bar{a} - \bar{b} &= t\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k} - (t\bar{i} - t\bar{j} - \bar{k}) \\ &= t\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k} - t\bar{i} + t\bar{j} + \bar{k} \\ &= 0\bar{i} + (1+t)\bar{j} - \bar{k}\end{aligned}$$

Vektorerna $\bar{a} + \bar{b}$ och $\bar{a} - \bar{b}$ är vinkelräta mot varandra, dvs. $(\bar{a} + \bar{b}) \perp (\bar{a} - \bar{b})$, vilket ger $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 0$. Vi får ekvationen

$$\begin{aligned}(2t\bar{i} + (1-t)\bar{j} - 3\bar{k}) \cdot (0\bar{i} + (1+t)\bar{j} - \bar{k}) &= 0 \\ 2t \cdot 0 + (1-t)(1+t) + (-3) \cdot (-1) &= 0 \\ 1 - t^2 + 3 &= 0 \\ t^2 &= 4 \\ t &= \pm 2\end{aligned}$$

Diagonalvektorerna är vinkelräta mot varandra om $t = \pm 2$.

Bevis

Alternativ 1

Parallelogrammen är en romb om alla sidor är lika långa. Vi måste visa att sidovektorerna \vec{a} och \vec{b} är lika långa.

Om $t = \pm 2$ så är vektorn $\vec{a} = \pm 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ och vektorn $\vec{b} = \pm 2\vec{i} \mp 2\vec{j} - \vec{k}$.

Vektorernas längder är

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\pm 2)^2 + 1^2 + (-1)^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{vektorns längd:} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$= 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\pm 2)^2 + (\mp 2)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$= 3$$

Dvs. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, vilket ger att parallelogrammen är en romb. \square

Anmärkning:

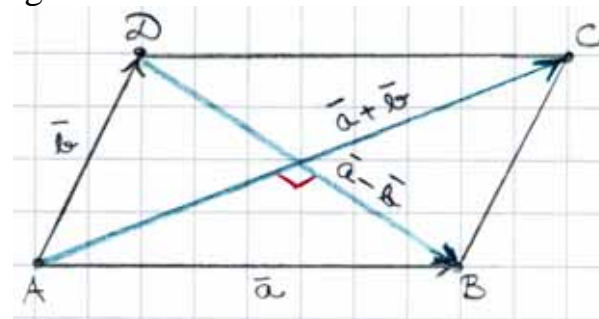
I geometrikursen finns en sats:

Rombens diagonaler halverar varandra och är vinkelräta mot varandra. (Att diagonalerna är vinkelräta mot varandra har visats i uppgifterna E5/298 och E3/504)

Satsen kan inte användas för att visa att parallelogrammen i uppgiften är en romb. Om den omvända satsen skulle vara bevisad så kunde den användas för att lösa uppgiften.

Alternativ 2

Vi visar först satsen: Om diagonalerna i en parallelogram är vinkelräta mot varandra så är parallelogrammen en romb. Vi ritar en figur.



Anta att sidorna som utgår från samma hörn i parallelogrammen $ABCD$ har längderna a och b . Vi betecknar sidovektorerna i parallelogrammen enligt figuren med vektorerna $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{a}$ och $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{b}$. Då är diagonalerna

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$$

Enligt antagandet är $\vec{AC} \perp \vec{DB}$ vilket ger att $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = 0$.

Vi får ekvationen

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 0$$

$$\overline{a}^2 - \overline{b}^2 = 0$$

$$|\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$$

$$|\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2 = 0$$

$$|\overline{a}|^2 = |\overline{b}|^2$$

$$|\overline{a}| = a, |\overline{b}| = b$$

$$a^2 = b^2$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a = b$$

Dvs. $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$, vilket ger att parallelogrammen $ABCD$ är en romb. \square

Diagonalvektorerna är vinkelräta mot varandra om $t = \pm 2$, vilket ger med den bevisade satsen ovan att för dessa värden på parametern t är parallelogrammen en romb. \square

Svar: Diagonalerna är vinkelräta mot varandra om $t = \pm 2$.

6.

Vi löser ut vektorn \overline{c} ur ekvationen

$$\overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c} = \overline{0}$$

$$3\overline{c} = -\overline{a} - 2\overline{b}$$

$$\overline{c} = -\frac{1}{3}(\overline{a} + 2\overline{b})$$

Enligt definitionen på skalär produkt är

$$|\overline{c}|^2 = \overline{c} \cdot \overline{c}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (\overline{a} + 2\overline{b}) \cdot (\overline{a} + 2\overline{b})$$

$$= \frac{1}{9}(\overline{a}^2 + 2\overline{a} \cdot 2\overline{b} + (2\overline{b})^2) \quad \left| \overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2 \right.$$

$$= \frac{1}{9}(|\overline{a}|^2 + 4\overline{a} \cdot \overline{b} + 4|\overline{b}|^2) \quad \left| \begin{array}{l} |\overline{a}| = |\overline{b}| = 1 \\ \overline{a} \perp \overline{b}, \text{ vilket ger} \\ \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \end{array} \right.$$

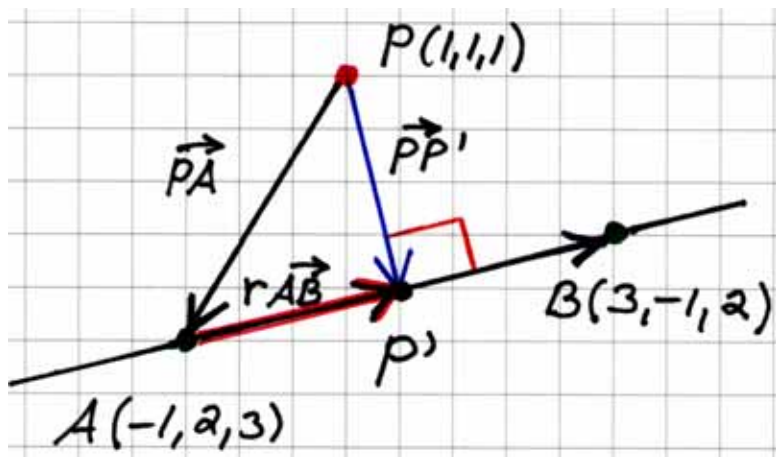
$$= \frac{1}{9}(1^2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1^2)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 5$$

$$\text{Dvs. } |\overline{c}| = (\pm) \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 5} = \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

$$\text{Svar: } \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

7.



Vi bestämmer längden av vektorn $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP'}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PA} + r\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} = (-1-1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (3-1)\vec{k} \\ \quad = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ \overrightarrow{AB} = [3-(-1)]\vec{i} + (-1-2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} \\ \quad = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PP'} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} + r(4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})$$

$$\overrightarrow{PP'} = (-2+4r)\vec{i} + (1-3r)\vec{j} + (2-r)\vec{k}$$

Eftersom $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{AB}$ så är

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(-2+4r) \cdot 4 + (1-3r) \cdot (-3) + (2-r) \cdot (-1) = 0$$

$$-8 + 16r - 3 + 9r - 2 + r = 0$$

$$26r = 13$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Då är

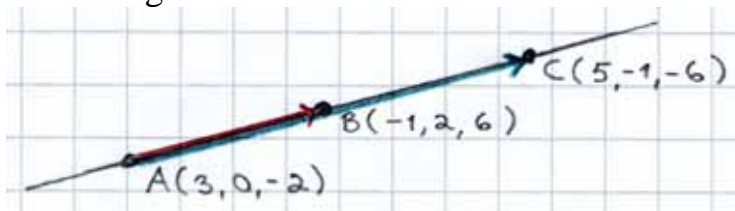
$$\overrightarrow{PP'} = -\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k} \quad \text{och}$$

$$|\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8. Punkterna A , B och C ligger på samma linje om och endast om $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$.

Vi ritat en figur.



Enligt parallellsatsen måste vi visa att det existerar ett reellt tal $r \neq 0$, så att $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{AC}$.

Vi bestämmer först vektorerna \overrightarrow{AB} och \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

$$= (-1 - 3)\bar{i} + (2 - 0)\bar{j} + (6 - (-2))\bar{k}$$

$$= -4\bar{i} + 2\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\begin{cases} A = (3, 0, -2) \\ = (x_1, y_1, z_1) \\ B = (-1, 2, 6) \\ = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

$$= (5 - 3)\bar{i} + (-1 - 0)\bar{j} + (-6 - (-2))\bar{k}$$

$$= 2\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\begin{cases} A = (3, 0, -2) \\ = (x_1, y_1, z_1) \\ C = (5, -1, -6) \\ = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

Alternativ 1

Vi får ekvationen

$$\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{AC}$$

$$-4\bar{i} + 2\bar{j} + 8\bar{k} = r(2\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k})$$

$$-4\bar{i} + 2\bar{j} + 8\bar{k} = 2r\bar{i} - r\bar{j} - 4r\bar{k} \quad \left| \begin{array}{l} \text{basvektorer} \\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \end{array} \right.$$

Eftersom uppdelningen i komponenter är entydig i en bas får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} -4 = 2r \\ 2 = -r \\ 8 = -4r \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} r = -2 \\ r = -2 \\ r = -2 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad r = -2$$

Eftersom $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{AC}$ om $r = -2 (\neq 0)$ så ligger punkterna A , B och C på samma linje.

Alternativ 2

Eftersom $\overrightarrow{AB} = -4\bar{i} + 2\bar{j} + 8\bar{k}$ och $\overrightarrow{AC} = 2\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}$ så får vi att $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$.

Eftersom $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{AC}$ om $r = -2 (\neq 0)$ så ligger punkterna A , B och C på samma linje.

Punkterna A , B och C ligger på samma linje. Vi skall nu undersöka i vilket förhållande som punkten A delar sträckan BC .

Vektorerna \overrightarrow{AB} och \overrightarrow{AC} är motsatt riktade eftersom $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$. Punkten A ligger då på sträckan BC .

Vi ritar en figur.

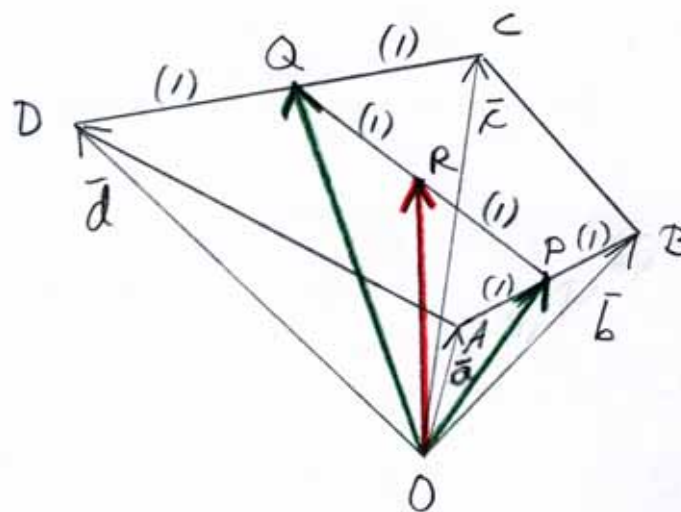


Punkten A delar sträckan BC i förhållandet

$$\begin{aligned} \frac{BA}{AC} &= \frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{AC}|} & |\overrightarrow{AB} &= -2\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{|2\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{2}{1} \end{aligned}$$

Svar: Punkterna A , B och C ligger på samma linje.
Punkten A delar sträckan BC i förhållandet 2:1.

9.
Vi ritar en figur.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \\ &= \overline{a} + \frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{OB}) + \frac{1}{2}(\overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ}) \\ &= \overline{a} + \frac{1}{2}(-\overline{a} + \overline{b}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BO} + \overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{CD}\right) \\ &= \overline{a} - \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{OB}) - \overline{b} + \overline{c} + \frac{1}{2}(\overline{CO} + \overline{OD})\right) \\ &= \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(-\overline{a} + \overline{b}) - \overline{b} + \overline{c} + \frac{1}{2}(-\overline{c} + \overline{d})\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{b} + \bar{c} - \frac{1}{2}\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{d}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{d}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} - \frac{1}{4}\bar{a} - \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{c} + \frac{1}{4}\bar{d} \\
 &= \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{c} + \frac{1}{4}\bar{d} \\
 &= \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}}{4}
 \end{aligned}$$

Alternativ 2

I trianglarna OAB och OCD ger satsen om delning av en sträcka att

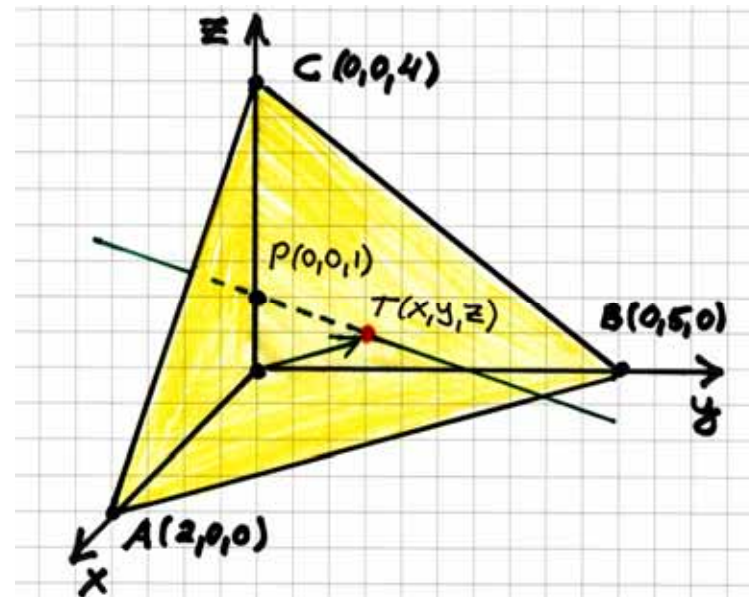
$$\overrightarrow{OP} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} \quad \text{och} \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\bar{c} + \bar{d}}{2}.$$

På motsvarande sätt ger satsen om delning av en sträcka i triangeln OPQ att

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OR} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} + \frac{\bar{c} + \bar{d}}{2}\right) \\
 &= \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}}{4}
 \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}}{4}$

10.



Anta att den sökta skärningspunkten mellan planet och normalen är $T = (x, y, z)$.

Vektorn

$$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AT}$$

$$= \overrightarrow{PA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

Vektorerna \overrightarrow{AB} och \overrightarrow{AC} är basvektorer i planet ABC eftersom de är icke-parallella.

$$\begin{aligned}
 &= (2-0)\bar{i} + (0-0)\bar{j} + (0-1)\bar{k} + r[(0-2)\bar{i} + (5-0)\bar{j} + (0-0)\bar{k}] + \\
 &\quad s[(0-2)\bar{i} + (0-0)\bar{j} + (4-0)\bar{k}] \\
 &= 2\bar{i} - \bar{k} + r(-2\bar{i} + 5\bar{j}) + s(-2\bar{i} + 4\bar{k}) \\
 &= (2 - 2r - 2s)\bar{i} + 5r\bar{j} + (-1 + 4s)\bar{k}
 \end{aligned}$$

Eftersom $\overrightarrow{PT} \perp$ planet ABC , så är \overrightarrow{PT} vinkelrät mot vektorerna \overrightarrow{AB} och \overrightarrow{AC} i planet. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PT} = (2 - 2r - 2s)\bar{i} + 5r\bar{j} + (-1 + 4s)\bar{k} \\ \overrightarrow{AB} = -2\bar{i} + 5\bar{j} \\ \overrightarrow{AC} = -2\bar{i} + 4\bar{k} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (2 - 2r - 2s) \cdot (-2) + 5r \cdot 5 + (-1 + 4s) \cdot 0 = 0 \\ (2 - 2r - 2s) \cdot (-2) + 5r \cdot 0 + (-1 + 4s) \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 + 4r + 4s + 25r = 0 \\ -4 + 4r + 4s - 4 + 16s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 29r + 4s = 4 \\ 4r + 20s = 8 \end{cases} \quad \left| \cdot 5 \right. \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \begin{cases} -145r - 20s = -20 \\ 4r + 20s = 8 \end{cases} \\ \hline -141r \qquad = -12 \end{array}$$

$$r = \frac{12}{141} = \frac{4}{47}$$

Insättning i ekvation (2).

$$4 \cdot \frac{4}{47} + 20s = 8$$

$$20s = 8 - \frac{16}{47}$$

$$20s = \frac{360}{47}$$

$$s = \frac{18}{47}$$

Dvs.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT} &= \left(2 - 2 \cdot \frac{4}{47} - 2 \cdot \frac{18}{47}\right)\overline{i} + 5 \cdot \frac{4}{47}\overline{j} + \left(-1 + 4 \cdot \frac{18}{47}\right)\overline{k} \\ &= \frac{50}{47}\overline{i} + \frac{20}{47}\overline{j} + \frac{25}{47}\overline{k}\end{aligned}$$

Ortsvektorn för punkten T är

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} = \overline{k} + \frac{50}{47}\overline{i} + \frac{20}{47}\overline{j} + \frac{25}{47}\overline{k} = \frac{50}{47}\overline{i} + \frac{20}{47}\overline{j} + \frac{72}{47}\overline{k}$$

Punkten $T = \left(\frac{50}{47}, \frac{20}{47}, \frac{72}{47}\right)$.

Svar: $\left(\frac{50}{47}, \frac{20}{47}, \frac{72}{47}\right)$