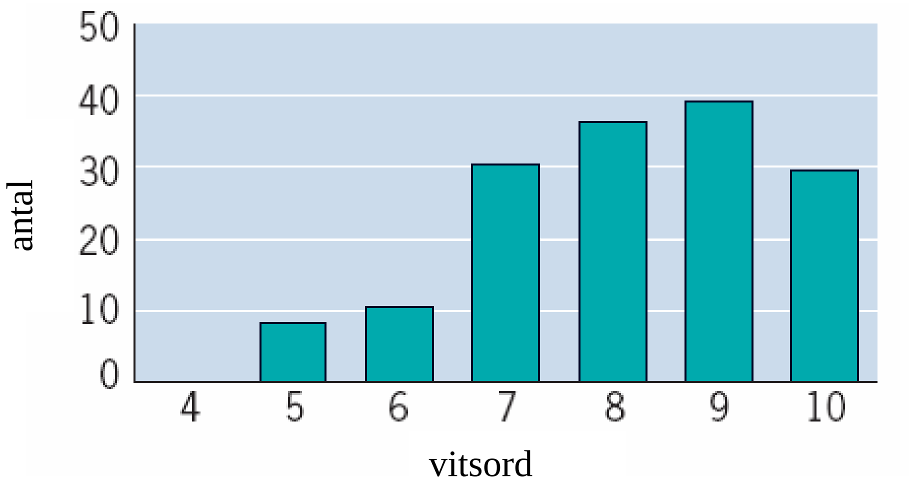
Övningsprov 1

1.



Medelvärde

$$\mu = \frac{04 + 85 + ... + 2910}{152} = 8{,}151\ldots \approx 8{,}15$$

Standardavvikelse

$$\sigma = \sqrt{\frac{0(48{,}15)2 + 8(58{,}15)2 + ... + 29(108{,}15)2}{152}}$$

$= 1{,}389... \approx 1{,}39$

Vi kan också bestämma medelvärde och standardavvikelse direkt med räknare.

2.

i) P(1:a äss och 2:a äss och 3:e äss och 4:e äss)

= P(1:a äss)

P(2:a äss | 1:a äss)

P(3:e äss | 1:a och 2:a äss)

P(4:a äss | 1:a och 2:a och 3:e äss)

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{1}{270\,725} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-6}$$

ii) P (1:a inte äss och 2:a inte äss och 3:e inte äss och 4:e inte äss)

= P(1:a inte äss) ·

P(2:a inte äss| 1:a inte äss) ·

P(3:e inte äss| 1:a och 2:a inte äss) ·

P(4:e inte äss| 1:a och 2:a och 3:e inte äss)

$$= \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} = \frac{38\,916}{54\,145} = 0{,}7187\ldots \approx 0{,}72$$

3.

a) DISJUNKTA

Alla bokstäver är olika och vi kan då permutera på 9! = 362 880 olika sätt

b) PARALLELLER

P:s plats kan väljas på 11 sätt.

A:s platser kan väljas på $\binom{10}{2}$ sätt.

R:s plaster kan välja på $\binom{8}{2}$ sätt.

L:s platser kan väljas på $\binom{6}{4}$sätt.

E:s platser kan väljas på 2 sätt

Enligt multiplikationsprincipen får vi

$11 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4} \cdot 2 = 207900$

4.

Medelvärdet nu $\overline{x}_1 = \dfrac{S_{10}}{10}$.

Om betyget stiger med ett steg i fyra ämnen, får vi medeltalet

$$\overline{x}_2 = \frac{S_{10} + 4 \cdot 1}{10} = 8,0$$

Vidare får vi

$S_{10} = 8,0 \cdot 10 - 4 = 76$,

Och då är

$$\overline{x}_1 = \frac{S_{10}}{10} = \frac{76}{10} = 7,6$$

Svar: Medelvärdet är 7,6

5.

P(kiosken säljer våfflor med hallonsylt) = *P*(H) = 59 %
P(kiosken säljer jättevåfflor) = *P*(J) = 29 %
P(kiosken säljer våfflor med hallonsylt | säljer jättevåfflor)
= *P*(H | J) = = 40 %

a) *P*(kiosken säljer jättevåfflor med hallonsylt)
= *P*(J och H)
= *P*(J) · *P*(H | J)
= 0,29 · 0,40
= 0,116

b) *P*(jättevåfflor eller våfflor med hallonsylt)
= *P*(J tai H)
= *P*(J) + *P*(H) – *P*(J och H) | fall a
= 0,29 + 0,59 – 0,116
= 0,764

c) *P*(varken jättevåfflor eller hallonsylt)
= $P\left(\overline{J} \text{ ja } \overline{H}\right)$
= 1 – *P*(J eller H)
= 1 – 0,764
= 0,236

d) *P*(jättevåfflor men inte hallonsylt)
= *P*(J men inte H) | se boken s. 100
= *P*(J) – *P*(J och H)
= 0,29 – 0,116
= 0,174

e) *P*(hallonsylt men inte jättevåfflor)
= *P*(H men inte J) | boken s. 100
= *P*(H) – *P*(H och J) | fall a
= 0,59 – 0,116
= 0,474

6.

a) P (datorn upptagen) = 0,95
P (datorn ledig) = 1 – 0,95 = 0,05
P (eleven hittar genast en ledig dator)
= P (åtminstone en dator ledig) |komplementregeln
= 1 – P (ingen dator ledig)
= 1 – P (alla datorer upptagna) | oberoende
= 1 – $\underbrace{0,95 \cdot 0,95 \cdot \ldots \cdot 0,95}_{16 \text{ st}}$
= 1 – $0,95^{16}$
≈ 0,56

b) 3 gula, 5 röda och x gröna flaskor
P (grön och grön) = $\frac{1}{5}$

P (1. grön och 2:a grön) = $\frac{1}{5}$

P (1. grön) · P (2. grön | 1:a grön) = $\frac{1}{5}$

$$\frac{x}{x+8} \cdot \frac{x-1}{x+7} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+8)(x+7)} = \frac{1}{5}$$

$$5x(x-1) = (x+8)(x+7)$$

$$5x^2 - 5x = x^2 + 7x + 8x + 56$$

$$4x^2 - 20x - 56 = 0 \qquad |:4$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 9}{2}$$

$$x = 7 \quad \text{tai} \quad x = -2 \qquad |\ x \geq 1$$

$$x = 7$$

Svar: 7 flaskor var gröna

Alternativ 2

Vi tar först en flaska och sedan en flaska till. Utfallen är då följder med 2 flaskor.

P (2 gröna) $= \dfrac{1}{5}$ | 2-permutationer

$$\frac{x\cdot(x-1)}{(x+8)\cdot(x+7)} = \frac{1}{5}$$

Fortsättningen som i alt. 1.

Alternativ 3

Vi tar 2 flaskor samtidigt, Utfallen är då mängder med 2 flaskor

P (grön och grön) $= \dfrac{1}{5}$ | 2-kombinationer

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{x+8}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\dfrac{x!}{2!\cdot(x-2)!}}{\dfrac{(x+8)!}{2!\cdot(x+6)!}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{2\cdot(x-2)!}\cdot\frac{2\cdot(x+6)!}{(x+8)\cdot(x+7)\cdot(x+6)!} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x\cdot(x-1)}{(x+8)\cdot(x+7)} = \frac{1}{5}$$

Fortsättningen som i 1.

7.

Vi gör en tabell över alla utfall:

2:a kastet						
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

1:a kastet

a) Fördelningen för den stokastiska variabeln X:

x	p
0	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
1	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$
2	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
3	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
4	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
5	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

b) Frekvensfunktion:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{6} & ,\text{när } x=0\\ \frac{5}{18} & ,\text{när } x=1\\ \frac{2}{9} & ,\text{när } x=2\\ \frac{1}{6} & ,\text{när } x=3\\ \frac{1}{9} & ,\text{när } x=4\\ \frac{1}{18} & ,\text{när } x=5\\ 0 & \text{för övriga } x\end{cases}$$

c) Fördelningsfunktion:

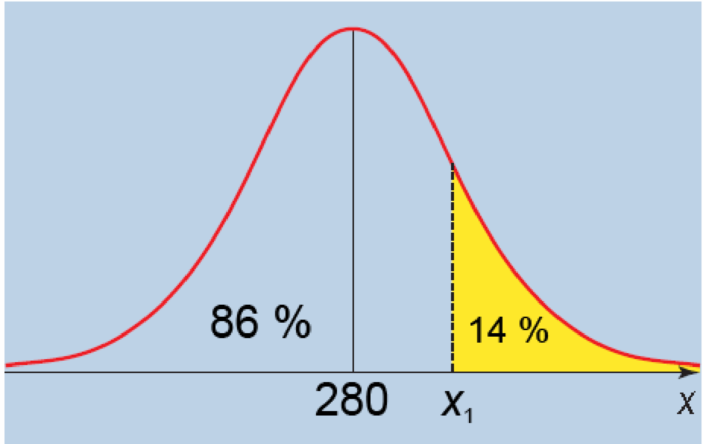
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{när } x<0 \\ \dfrac{1}{6} & ,\text{när } 0\le x<1 \\ \dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9} & ,\text{när } 1\le x<2 \\ \dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3} & ,\text{när } 2\le x<3 \\ \dfrac{5}{6} & ,\text{när } 3\le x<4 \\ \dfrac{17}{18} & ,\text{när } 4\le x<5 \\ 1 & ,\text{när } x\ge 5 \end{cases}$$

d) Fördelningen är diskret.

e) $P(X\le 10)=1$

f) $P(X>2)=P(X=3 \text{ eller } X=4 \text{ eller } X=5)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

8.



Den stokastiska variabeln X, resultatet i intelligenstestet har fördelningen $X\sim N(280,\ 142)$. Anta att x_1 är Johans poäng.

Vi får ekvationen:

$$P\left(X > x_1\right) = 14\ \%$$
$$P\left(X \le x_1\right) = 86\ \%$$
$$P\left(Z \le \frac{x_1 - 280}{142}\right) = 0{,}86$$
$$\Phi\left(\frac{x_1 - 280}{142}\right) = 0{,}86 \qquad \Big|\text{Maols tabeller}$$
$$\frac{x_1 - 280}{142} = 1{,}08$$
$$x_1 = 280 + 1{,}08 \cdot 142$$
$$x_1 = 433{,}36$$
$$x_1 \approx 430$$

9.

Ögonsumman för alla ögontal på en tärning är

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

Summan av de fyra synliga sidorna är 12, när de övermålade sidorna är

1 och 2	(18)
2 och 3	(16)
3 och 4	(14)
1 och 3	(17)
2 och 4	(15)
3 och 5	(13)
1 och 4	(16)
2 och 5	(14)
1 och 5	(15)
2 och 6	(13)
1 och 6	(16)

2 sidor kan väljas på $\binom{6}{2}$ olika sätt, gynnsamma är de ovannämnda 11

Alltså

P(poängsumman av de synliga sidorna är större än 12)

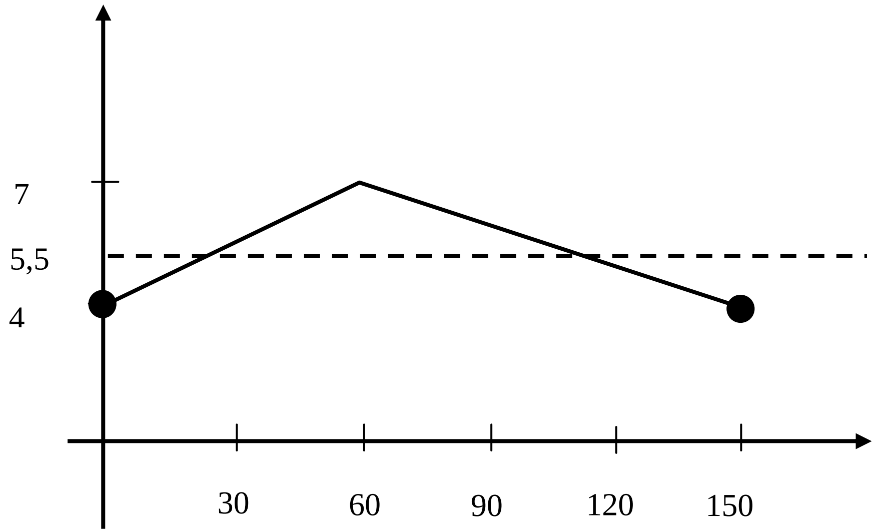
$$= \frac{11}{\binom{6}{2}} = \frac{11}{15} \approx 0{,}73$$

10.

Högst $\frac{330}{60} = 5,5$ bilar per minut kan köra igenom avsnittet. Stockningen börjar när antalet bilar per minut överstiger detta värde

$$4 + \frac{t}{20} = 5,5 \qquad \Big| \cdot 20$$
$$80 + t = 110$$
$$t = 30 \qquad \text{(kl. 07.30)}$$

Stockningen börjar kl. 07.30.



Den mängd bilar som kommer till avsnittet kl. 07.30–08.20 kan beräknas med hjälp av arean mellan täthetsfunktionen och x-axeln

$$A_{30-80} = \frac{f(30) + f(60)}{2} \cdot (60 - 30) + \frac{f(60) + f(80)}{2} \cdot (80 - 60)$$
$$= \frac{4 + \frac{30}{20} + 4 + \frac{60}{20}}{2} \cdot 30 + \frac{9 - \frac{60}{30} + 9 - \frac{80}{30}}{2} \cdot 20$$
$$= \frac{5,5 + 7}{2} \cdot 30 + \frac{7 + 9 - \frac{8}{3}}{2} \cdot 20$$
$$= 6,25 \cdot 30 + 6,666... \cdot 20$$
$$= 320,8333...$$

För dessa bilar tar det

$$\frac{320,8333...}{5,5} = 58,333... \text{ minuter.}$$

Då kör den sista dvs. den som kom kl. 08.20 till stockningen kör igenom an kl.
$07.30 + 0.58,33... = 08.28,333...$
Dvs. bilisten måste sitta $8,333... \approx 8$ minuter.

Övningsprov 2

1.

Medelvärde:

$$\mu = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5}{7} = 3{,}285\ldots \approx 3{,}3$$

Standardavvikelse:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{7}\left(2\cdot(2-\mu)^2 + 2\cdot(3-\mu)^2 + 2\cdot(4-\mu)^2 + (5-\mu)^2\right)}$$
$$= 1{,}030\ldots \approx 1{,}0$$

Högsta möjliga slutvitsord för nio kurser:

$$\mu = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5 + 2\cdot 5}{9} = 3{,}666\ldots \approx 4$$

Lägsta möjliga slutvitsord för nio kurser:

$$\mu = \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5}{7} = 2{,}777\ldots \approx 3$$

2.

$\boxed{\mathbf{M}}$ $\boxed{\mathbf{M}}$ $\boxed{\mathbf{M}}$ $\boxed{\mathbf{A}}$ $\boxed{\mathbf{A}}$

$P(\text{MAMMA})$
$= P(\text{M})\cdot P(\text{A} \mid \text{M}) \cdot P(\text{M} \mid \text{MA}) \cdot P(\text{M} \mid \text{MAM}) \cdot P(\text{A} \mid \text{MAMM})$
$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$
$= \frac{1}{10}$

Alternativ 2

Följderna med fem kort utgör utfallen.

Enligt klassisk sannolikhet

$$P(\text{MAMMA}) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{10}$$

3.

a) $\binom{4}{3} \cdot \binom{52-4}{2} = 4512$

b) $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{52-4-4}{1} = 1584$

c) $\underbrace{\binom{52}{5}}_{\text{mängder med fem kort}} - \underbrace{\binom{52-4}{5}}_{\text{mängder med 5 kort utan äss}} = 886\,656$

4.

Eleven måste gissa svaret på 10 frågor och av dessa måste han få minst 7 frågor rätt. Vi har alltså ett upprepat försök där antalet upprepningar är $n = 10$ och sannolikheten att lyckas i ett försök är $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ och $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

P(minst 17 rätt av 20)

$= P$(minst 7 rätt av de som eleven gissar)

$= P$(eleven får 7 el 8 el 9 el 10 rätt) | disjunkta
P (7 rätt) + P (8 rätt) + P (9 rätt) + P (10 rätt)

$$= \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

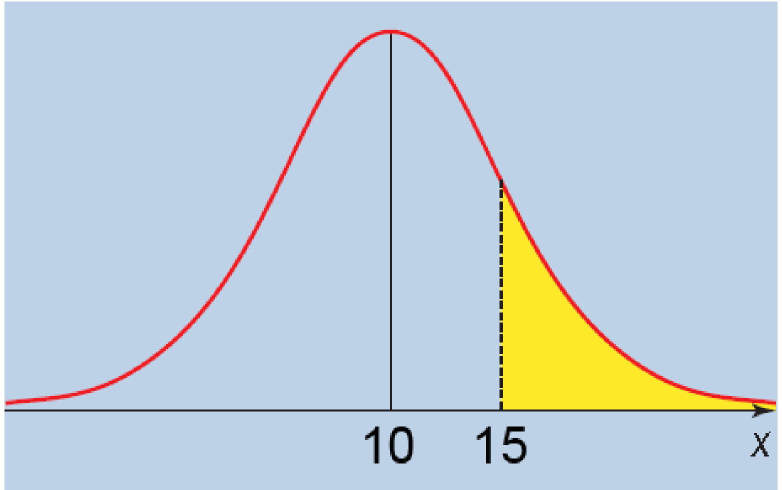
$$= 176 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 176 \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

$$= \frac{176}{1024}$$

$$= \frac{11}{64} \approx 0{,}17$$

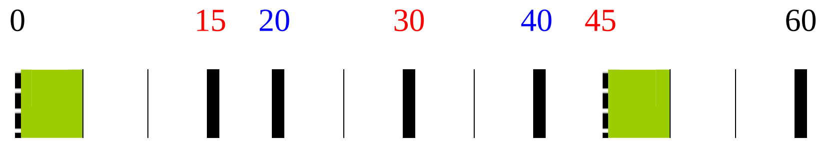
5.



Tillverkningstiden för pizzorna är $X \sim \mathrm{N}(10;\ 2{,}5)$.

$$P(X > 15) = P\left(Z > \frac{15-10}{2{,}5}\right)$$
$$= P(Z > 2{,}0)$$
$$= 1 - \Phi(2{,}0)$$
$$\approx 1 - 0{,}9772$$
$$= 0{,}0228$$
$$= 2{,}3\%$$

6.



Gynnsam tid 2 · 5 min = 10 min

P (väntetiden över10 min) = $\dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$

7.

Vi beräknar först sannolikheten att på 10 kast få åtminstone en etta.
Vi har ett upprepat försök med 10 upprepningar och sannolikheten att lyckas är $p = \dfrac{1}{6}$.

$$p_1 = P(\text{minst en etta på 10 kast})$$
$$= 1 - P(\text{ingen etta på 10 kast})$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$
$$= 1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}$$

Vidare

$$P(X \text{ måste betala } 2\,000 \text{ mark}) = p_1$$

och

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \text{ vinner } 10\,000 \text{ mark}) &= 1 - p_1 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}\right) \\ &= \frac{5^{10}}{6^{10}}\end{aligned}$$

Väntevärdet för X vinst i mark

$$E(X) = \left(1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}\right) \cdot (-2\,000) + \frac{5^{10}}{6^{10}} \cdot 10\,000 = -61{,}933... \approx -62$$

8.

Vi har ett upprepat försök där antalet upprepningar är 60 och sannolikheten att lyckas i ett försök är $p = \frac{1}{3}$.

Om man gissar är antalet rätta svar $X \sim \mathrm{Bin}\left(60, \frac{1}{3}\right)$.

Eftersom antalet upprepningar är stort gäller

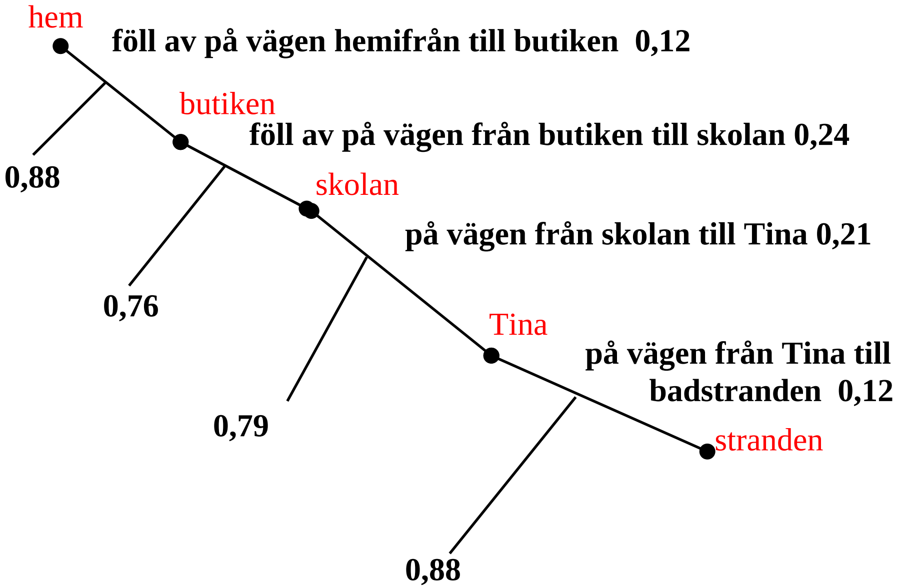
$X \sim \mathrm{N}\left(60 \cdot \frac{1}{3},\ 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$ approximativt dvs.

$X \sim \mathrm{N}\left(20, \frac{40}{3}\right)$, där $\mu = 20$ och $\sigma = \sqrt{\frac{40}{3}}$.

$$\begin{aligned}&P(\text{minst hälften av svaren är rätt}) \\ &= P(X \geq 29{,}5) \\ &= P\left(Z \geq \frac{29{,}5 - 20}{\sqrt{\frac{40}{3}}}\right) \\ &= P(Z \geq 2{,}60) \\ &= 1 - \Phi(2{,}60) \\ &= 1 - 0{,}9953 \\ &= 0{,}0047 \approx 0{,}5\%\end{aligned}$$

9.

Vi ritar en figur:



Vi betecknar

A = ”byxorna föll av mellan hemmet och butiken”

B = ”byxorna föll av mellan butiken och skolan”

C = ”byxorna föll av mellan skolan och Tina”

D = ”byxorna föll av mellan Tina och stranden”

E = ”byxorna föll av på vägen mellan hemmet och stranden”

a) $P(E)$
$= P(A \text{ eller } B \text{ eller } C \text{ eller } D)$ |disjunkta
$= P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$
$= 0{,}12 + 0{,}24 + 0{,}21 + 0{,}12$
$= 0{,}69$

b) $P(C \mid E)$

$$= \frac{P(C \text{ och } E)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(C)}{P(E)}$$

$$= \frac{0{,}21}{0.69}$$

$$= 0{,}30434... \approx 0{,}30$$

10.

Anta att antalet dragna kort är x

$$P(\text{minst ett äss}) \geq 0{,}70$$
$$1 - P(\text{inget äss}) \geq 0{,}70$$
$$1 - \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \ldots \cdot \frac{48-(x-1)}{52-(x-1)} \geq 0{,}70$$
$$1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \ldots \cdot [48-(x-1)]}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot [52-(x-1)]} \geq 0{,}70$$

Alternativ 1

$$1 - \frac{(48)_x}{(52)_x} \geq 0{,}70$$

Eftersom $P(\text{minst ett äss})$ växer när x växer kan vi lösa olikheten $1 - \frac{(48)_x}{(52)_x} \geq 0{,}70$ genom prövning

Vi använder räknarens nPr-funktion

- När x = 13, så är $1 - \frac{(48)_{13}}{(52)_{13}} = 0{,}696\ldots < 0{,}70$
- När x = 14, så är $1 - \frac{(48)_{14}}{(52)_{14}} = 0{,}727\ldots \geq 0{,}70$

Alltså $x \geq 14$, vi måste alltså dra minst 14 kort

Alternativ 2

$x > 4$, eftersom $1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}28 < 0{,}70$, kan vi förlänga enligt följande

$$1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \ldots \cdot [48-(x-5)] \cdot [48-(x-4)] \cdot [48-(x-3)] \cdot [48-(x-2)] \cdot [48-(x-1)]}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot [52-(x-1)]} \geq 0{,}70$$

$$1 - \frac{(48-(x-4)) \cdot (48-(x-3)) \cdot (48-(x-2)) \cdot (48-(x-1))}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \geq 0{,}70$$

$$\underbrace{1 - \frac{(52-x) \cdot (51-x) \cdot (50-x) \cdot (49-x)}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}}_{\text{strängt växande, eftersom sannolikheten att få ett äss växer med antalet dragna kort}} \geq 0{,}70$$

Vi löser olikheten genom prövning

När x = 13, så är $1 - \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}696$

När x = 14, så är $1 - \frac{38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}727$

Alltså är antalet kort flera än 14

Övningsprov 3

1.

Vi har ett upprepat försök där

$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (femma eller sexa på ett kast)

$n = 10$ (antal upprepningar)

$k = 4$ (antal lyckade)

$q = 1 - p = \frac{2}{3}$

Enligt binomialsannolikhet

P (ögontalen 5 eller 6 exakt 4 gånger av 10)

$$= \binom{10}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6 = 210 \cdot \frac{2^6}{3^{10}} = \frac{210\cdot 2^6}{3\cdot 3^9} = \frac{70\cdot 2^6}{3^9}$$

$$= \frac{4480}{19\,683} = 0,2276\ldots \approx 0,23$$

2.

Vi har ett upprepat försök där

$p = 0,10$ (sannolikheten att träffa med en pil)

$n = 30$ (antalet upprepningar)

Anta att X är den stokastiska variabel som beskriver antalet träffar. Då har vi $X \sim \text{Bin}\,(30;\, 0,10)$.

Sannolikheten $P(X = k) = \binom{30}{k} 0,10^k \cdot 0,90^{30-k}$, $0 \le k \le 30$,

är först strängt växande och sedan strängt avtagande. Vi bestämmer största värdet för sannolikheten för

$P(X = k) = \binom{30}{k} 0,10^k \cdot 0,90^{30-k}$ för olika värden på k:

När $k = 2$, så är $P(X = 2) = \binom{30}{2} 0,10^2 \cdot 0,90^{30-2} = 0,2276\ldots$

När $k = 3$, så är $P(X = 3) = \binom{30}{3} 0,10^3 \cdot 0,90^{30-3} = 0,2360\ldots$

När $k = 4$, så är $P(X = 4) = \binom{30}{4} 0,10^4 \cdot 0,90^{30-4} = 0,1770\ldots$

Det mest sannolika antalet träffar är 3 och poängen 6

Svar. Mest sannolika poäng är 6

3.

a) Man kan välja 7 nummer av 9 på

$$\binom{9}{7} = 36 \text{ olika sätt.}$$

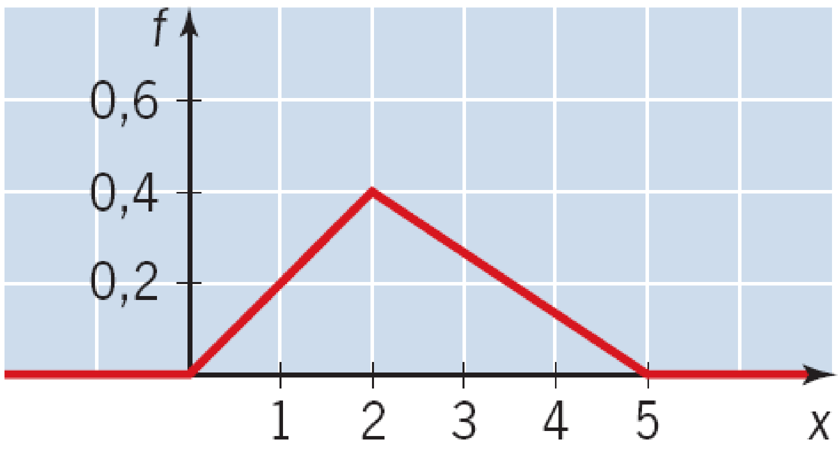
Hans lottorad motsvarar 36 vanliga lottotrader
Sannolikheten att få 7 rätt ökar med 36 gånger.

b) Priset bör multipliceras med 36 dvs.

$$36 \cdot 0{,}70\text{ €} = 25{,}20\text{ €}.$$

4.

a) Täthetsfunktionens graf:



b) Vi bestämmer sannolikheterna med hjälp av aran mellan x-axeln och täthetsfunktionens graf:

$$P(X \leq 1) = \frac{(1-0)\cdot f(1)}{2} = \frac{\frac{1}{5}\cdot 1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X > 3) = \frac{(5-3)\cdot f(3)}{2} = \frac{2\cdot\left(-\frac{2}{15}\cdot 3 + \frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{4}{15}$$

$$P(1 < X \leq 3) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{150-15-40}{150} = \frac{95}{150} = \frac{19}{30}$$

5.

25 lag

a)

1:a laget spelar mot de övriga lagen	24 matcher
2:a laget spelar mot de övriga lagen	23 matcher
3:e laget spelar mot de övriga lagen	22 matcher
⋮	
23:e laget spelar mot de övriga lagen	2 matcher
24:e laget mot de övriga	1 match
25:e laget spelar inte mot någon.	0 matcher

Totala antalet matcher

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 23 + 24$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + 23 + 24}_{\text{24 st (jämnt antal)}}$$

$$= \underbrace{(1 + 24) + (2 + 23) + \ldots + (12 + 13)}_{\text{12 st}}$$

$$= 12 \cdot 25$$

$$= 300$$

Alternativ 2

En match motsvarar en delmängd på 2 lag av 25

$$\binom{25}{2} = \frac{25!}{2! \cdot 23!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23!}{2 \cdot 23!} = 300$$

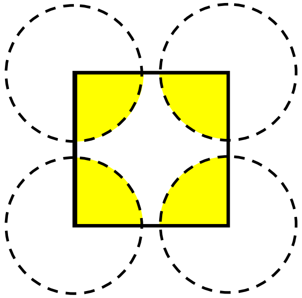
b)

1:a omgången, 12 faller ut,	12 + 1 = 13 lag blir kvar
2:a omgången 6 faller ut,	6 + 1 = 7 lag blir kvar
3:e omgången, 3 faller ut,	3 + 1 = 4 lag blir kvar
4:e omgången 2 faller ut,	4 – 2 = 2 lag blir kvar
5:e omgången ett lag faller ut,	2 – 1 = 1 lag(vinnaren)
blir kvar	

Totalt 12 + 6 + 3 + 2 + 1 = 24 matcher

6.

Vi undersöker en kvadratisk ruta (sidan 50 mm) och ser var slantens mittpunkt måste landa för at täcka ett hörn



Slantens mittpunkt måste landa i någon av sektorerna (r = 13 mm). Sektorernas sammanlagda area är

$$A_{gynnsam} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 13^2}{4} = 169\pi \ \left(\text{mm}^2\right)$$

Kvadratens area är (s = 50 mm)

$$A_{kvadrat} = s^2 = 50^2 = 2500 \ \left(\text{mm}^2\right)$$

Vi får då

$$P(\text{slanten täcker ett hörn}) = \frac{A_{\text{gynnsam}}}{A_{kvadrat}} = \frac{169\pi \text{ mm}^2}{2500 \text{ mm}^2} = 0{,}2123... \approx 0{,}21$$

7.

2 röda, 3 blå och 4 svarta bollar

a)

P(bollarna har samma färg)

$$= P(\text{rr eller bb eller ss}) \quad | \text{ disjunkta}$$
$$= P(\text{rr}) + P(\text{bb}) + P(\text{ss}) \quad | \text{ oberoende}$$
$$= P(r) \cdot P(r) + P(b) \cdot P(b) + P(s) \cdot P(s)$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \frac{29}{81} \approx 0{,}36$$

Alternativ 2

Vi betecknar bollarna r_1, r_2, b_1, b_2, b_3, s_1, s_2, s_3 , s_4
Vi får följande tabell:

2dragningen									
s4						·/·	·/·	·/·	·/·
s_3						·/·	·/·	·/·	·/·
s_2						·/·	·/·	·/·	·/·
s_1						·/·	·/·	·/·	·/·
B3			·/·	·/·	·/·				
b_2			·/·	·/·	·/·				
b_1			·/·	·/·	·/·				
r_2	·/·	·/·							
r_1	·/·	·/·							
	r_1	r_2	b_1	b_2	b_3	s_1	s_2	s_3	s_4

1. dragningen

Utfallen är symmetriska och enligt klasisk sannolikhet:

$$P(\text{bollarna av samma färg}) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{29}{81} \approx 0{,}36$$

b) $P(\text{bollarna har samma färg})$

$= P(r_1\ r_2 \text{ eller } b_1\ b_2 \text{ eller } s_1\ s_2)$ | disjunkta

$= P(r_1\ r_2) + P(b_1\ b_2) + P(s_1\ s_2)$ | allmänna multipl. regeln

$= P(r_1) \cdot P(r_2|r_1) + P(b_1) \cdot P(b_2|b_1) + P(s_1) \cdot P(s_2|s_1)$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{5}{18} \approx 0{,}28$$

Alternativ 2

Vi betecknar bollarna : r_1, r_2, b_1, b_2 b_3, s_1, s_2, s_3 , m_s

Vi får följande tabell:

2. dragningen

	r_1	r_2	b_1	b_2	b3	s_1	s_2	s_3	s_4
s_4						·/·	·/·	·/·	■
s_3						·/·	·/·	■	·/·
s_2						·/·	■	·/·	·/·
s_1						■	·/·	·/·	·/·
b_3			·/·	·/·	■				
b_2			·/·	■	·/·				
b_1			■	·/·	·/·				
r_2	·/·	■							
P_r	■	·/·							

1. dragningen

Utfallen är symmetriska och enligt klassisk sannolikhet

$$P(\text{bollarna har samma färg}) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{20}{9 \cdot 9 - 9} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18} \approx 0{,}28$$

8.

Vi har ett upprepat försök med n upprepningar och sannolikheten att lyckas är $p = \frac{1}{6}$. Antalet ettor är binomialfördelat $X \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

Om vi bildar en ekvation för väntevärdet av antalet ettor med binomialsannolikhet får vi

$$E(X) = 9$$

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + \ldots + p_n \cdot n = 9$$

$$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 9$$

Denna ekvation är för krånglig att lösa. Vi använder då approximation med normalfördelningen. Om antalet upprepningar är stort kan vi approximera

$$X \sim \text{N}\left(\text{n} \cdot \frac{1}{6},\ n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) \text{ dvs. } X \sim \text{N}\left(\frac{n}{6}, \frac{5n}{36}\right).$$

Vi bör alltså ha

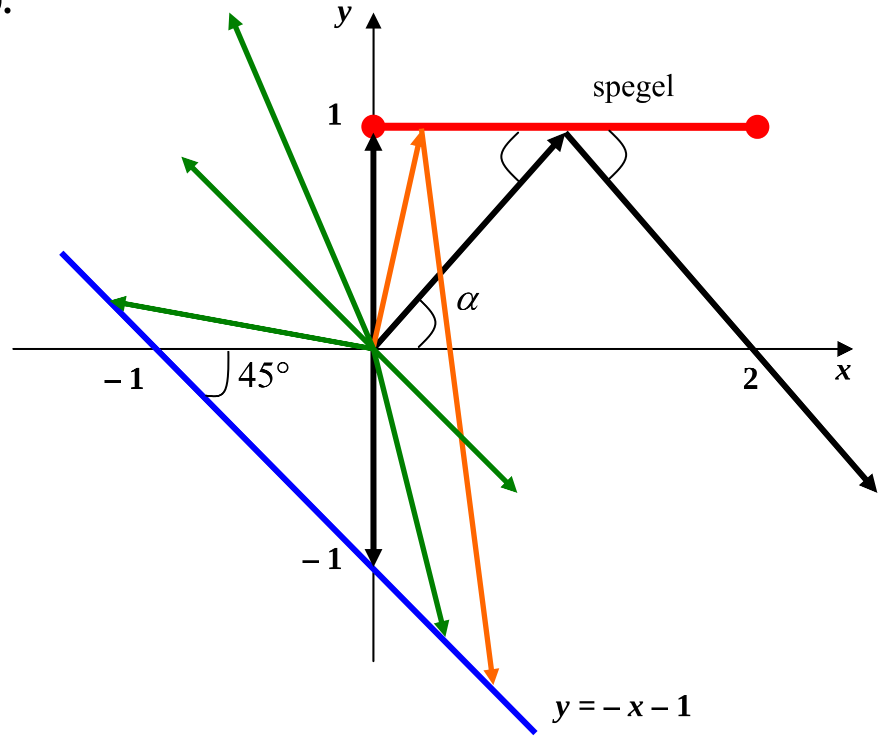
$$\frac{n}{6} = 9$$

$$n = 9 \cdot 6$$

$$n = 54$$

Svar: Minst 54 gånger

9.



Anta att α är vinkeln mellan den från origo utgående ljusstrålen och positiva x-axeln. Då gäller $0° \leq \alpha < 360°$.

- När strålen reflekteras i spegeln är infalls- och reflexionsvinkel lika stora. Då träffar den reflekterade strålen linjen
$y = -x - 1$, vars riktningsvinkel är $45°$, när $45° < \alpha \leq 90°$.
- En stråle som inte reflekteras träffar linjen $y = -x - 1$, om $135° < \alpha < 315°$.

Enligt geometrisk sannolikhet får vi

$$P = \frac{(90° - 45°) + (315° - 135°)}{360° - 0°} = \frac{225°}{360°} = \frac{5}{8} = 0,625$$

10.

a) $P = \frac{52}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{36}{48} = \frac{2112}{4165} \approx 50,7\ \%$

b) Parets valör kan väljas på 13 sätt.

Paret kan väljas på $\binom{4}{2}$ sätt.

De övriga tre korten kan väljas på $\frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}$ sätt.

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}}{\binom{52}{5}} = \frac{352}{833} \approx 42,3\ \%$$

Alternativ 2

Mängder med 5 kort utgör utfallen.

Antalet följder där paret är först är $52 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40$.

Parets plats kan väljas på $\binom{5}{2} = 10$ sätt.

Antalet följder med 5 kort med ett par är alltså $\binom{5}{2} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40$ st. Motsvarande mängder med 5 kort är (utan ordning)

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{5!} = 1\ 098\ 240$$

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\frac{\binom{5}{2} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{5!}}{\binom{52}{5}} = \frac{1\ 098\ 240}{2\ 598\ 960} = \frac{352}{833} \approx 42,3\ \%$$

Alternativ 3

Utfallen är följder med 5 kort. /jfr alt 2

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\binom{5}{2} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{352}{833} \approx 42{,}3\ \%$$

c) Jämför med b-fallet!

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2!}}{\binom{52}{5}} = \frac{88}{4165} \approx 2{,}1\ \%$$

Alternativ 2
Utfallen är mängder med 5 kort

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\frac{\binom{5}{3} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44}{5!}}{\binom{52}{5}} = \frac{88}{4165} \approx 2{,}1\ \%$$

Alternativ 3
Utfallen är följder med 5 kort

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\binom{5}{3} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{88}{4165} \approx 2{,}1\ \%$$

d) Valören för trisset kan väljas på 13 sätt

Trisset kan väljas på $\binom{4}{3}$ olika sätt bland fyra kort.

Parets valör kan väljas på 12 sätt och parets kort på $\binom{4}{2}$ olika sätt.
Enligt multiplikationsprincipen och klassisk sannolikhet får vi

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165} \approx 0{,}14\ \%$$

Alternativ 2

Utfallen är mängder med 5 kort.

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\frac{\binom{5}{3} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 3}{5!}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165} \approx 0{,}14\ \%$$

Alternativ 3

Utfallen är följder med 5 kort.

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\binom{5}{3} \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 3}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{6}{4165} \approx 0{,}1$$