

## Prov 1

1

a)  $f(x) = 2x(4x-1)^5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= D[2x(4x-1)^5] && | \quad D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f \\ &= D(2x) \cdot (4x-1)^5 + D(4x-1)^5 \cdot 2x \\ &= 2 \cdot (4x-1)^5 + 5(4x-1)^4 \cdot 4 \cdot 2x \\ &= 2(4x-1)^4(4x-1+20x) \\ &= 2(4x-1)^4(24x-1) \end{aligned}$$

Vi löser ekvationen

$$f'(x) = 0$$

$$2(4x-1)^4(24x-1) = 0$$

$$(4x-1)^4 = 0 \quad \text{eller} \quad 24x-1 = 0$$

$$4x-1 = 0 \quad \text{eller} \quad x = \frac{1}{24}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

b)  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{e^x} \quad \left| \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df) \cdot g - (Dg) \cdot f}{g^2}\right.$

$$f'(x) = \frac{D(-x^2 + 2x + 2) \cdot e^x - De^x \cdot (-x^2 + 2x + 2)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(-2x + 2) \cdot e^x - e^x \cdot (-x^2 + 2x + 2)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x(-2x + 2 + x^2 - 2x - 2)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{x^2 - 4x}{e^x}$$

Vi löser ekvationen

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 4x}{e^x} = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 4$$

**Svar**

a)  $x = \frac{1}{24}$  eller  $x = \frac{1}{4}$   
 b)  $x = 0$  eller  $x = 4$

**2**

Funktionen  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x} + \sqrt[3]{4-x^2}$  är inte definierad när  
 $x+1 < 0$  eller  $x=0$   
 $x < -1$  eller  $x=0$

**Svar**  $x < -1$  eller  $x = 0$

**3**

$f(x) = 2x^2$  och  $g(x) = x - 1$

**a)**

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && | g(x) = x - 1 \\ &= f(x - 1) && | f(x) = 2x^2 \\ &= 2 \cdot (x - 1)^2 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 2 = 8 + 8 + 2 = 18$$

**b)**

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && | f(x) = 2x^2 \\ &= g(2x^2) && | g(x) = x - 1 \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 1 = 7$$

**Svar**

a)  $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 2$   
 $(f \circ g)(-2) = 18$   
 b)  $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$   
 $(g \circ f)(-2) = 7$

4

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \right)^{-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+2} \cdot x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2)$$

$$= \sqrt{4} + 2$$

$$= 4$$

Funktionen  $f(x) = \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \right)^{-1}$

är inte definierad för

$x = 4$ . Vi faktorererar.

Funktionen  $g(x) = \sqrt{x} + 2$

är kontinuerlig för  $x = 4$ ,

och  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = g(4)$ .

5

$$1 + 4\sqrt{1-x} = 4x$$

$$4\sqrt{1-x} = 4x - 1 \quad \left| (\quad)^2 \right.$$

Kontrollera!

$$(4\sqrt{1-x})^2 = (4x-1)^2$$

$$16(1-x) = 16x^2 - 8x + 1$$

$$16 - 16x = 16x^2 - 8x + 1$$

$$16x^2 + 8x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-15)}}{2 \cdot 16} = \frac{-8 \pm 32}{32}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{5}{4}$$

Kontroll:

- När  $x = \frac{3}{4}$ , är ekvationens

vänstra led  $1 + 4\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 + 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$  och

högra led  $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

Dvs.  $x = \frac{3}{4}$  är lösning till ekvationen  $1 + 4\sqrt{1-x} = 4x$ .

- När  $x = -\frac{5}{4}$ , är ekvationens

vänstra led  $1 + 4\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{4}\right)} = 1 + 4 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 7$  och

högra led  $4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -5$

Dvs.  $x = -\frac{5}{4}$  är inte en lösning till ekvationen

$$1 + 4\sqrt{1-x} = 4x.$$

**Svar**  $x = \frac{3}{4}$

**6**

**a)**

$$2^{x^2-12} = \frac{1}{8} \quad \left| \begin{array}{l} x \in R \\ \text{Vi skriver båda leden} \\ \text{med samma bas.} \end{array} \right.$$

$$2^{x^2-12} = \frac{1}{2^3} \quad \left| \frac{1}{a^n} = a^{-n} \right.$$

$$2^{x^2-12} = 2^{-3} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Exponentialfunktionen } 2^x \text{ är } \textit{strängt} \\ \textit{växande} \text{ och likheten bevaras} \end{array} \right.$$

$$x^2 - 12 = -3$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

**b)**

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-x^3+x} - 1 \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} x \in R \\ \text{Vi skriver båda leden} \\ \text{med samma bas.} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-x^3+x} \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-x^3+x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^0$$

Funktionen  $\left(\frac{1}{7}\right)^x$  är en *strängt avtagande* exponentialfunktion eftersom basen  $0 < \frac{1}{7} < 1$ . Olikheten byter riktning.

$$-x^3 + x \leq 0$$

$$x(-x^2 + 1) \leq 0$$

Nollställen:

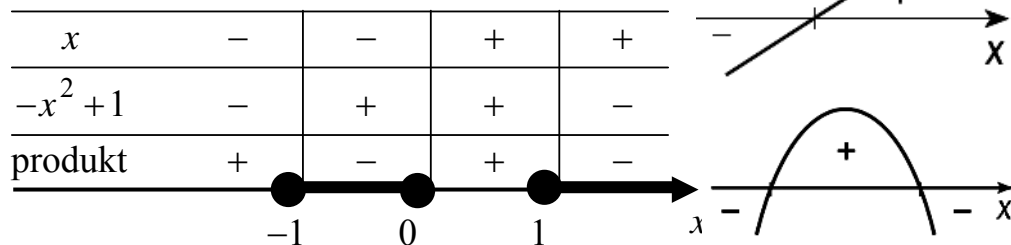
$$x(-x^2 + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } -x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Teckenschema:



Olikhetens lösning är  $-1 \leq x \leq 0$  eller  $x \geq 1$

c)

$$\log_3 x = -3$$

$$x = 3^{-3}$$

$$x = \frac{1}{3^3}$$

$$x = \frac{1}{27}$$

duger

$$x > 0$$

definition på logaritm

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

d)

$$\log_2(2x-1) < 3$$

$$2^{\log_2(2x-1)} < 2^3$$

$$2x-1 < 8$$

$$2x < 9$$

$$2x-1 > 0 \text{ dvs. } x > \frac{1}{2}$$

Funktionen  $2^x$  är strängt växande, eftersom basen  $2 > 1$ .

Storleksordningen bevaras.

definition på logaritm :

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \text{ och}$$

$$x = a^{\log_a x}$$

$$x < \frac{9}{2}$$

$$x < 4\frac{1}{2} \quad \left| \quad x > \frac{1}{2} \right.$$

$$\frac{1}{2} < x < 4\frac{1}{2}$$

Olikhetens lösning är  $\frac{1}{2} < x < 4\frac{1}{2}$

**Svar** a)  $x = \pm 3$     b)  $-1 \leq x \leq 0$  eller  $x \geq 1$

c)  $x = \frac{1}{27}$     d)  $\frac{1}{2} < x < 4\frac{1}{2}$

**7**

a)  $f(x) = 3x^5 + \ln x^4, x > 0.$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig och deriverbar.

$$f'(x) = 3 \cdot 5x^4 + \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3$$

$$= \underbrace{15x^4}_{>0} + \underbrace{\frac{4}{x}}_{>0} > 0 \quad | \quad x > 0$$

Eftersom derivatan är positiv i hela definitionsmängden är funktionen  $f$  strängt växande. Då existerar en invers funktion

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 1^4 + \frac{4}{1}}$$

$$= \frac{1}{19}$$

$$3 = f(x_0)$$

$$3 = 3x_0^5 + \ln x_0^4$$

$x_0 = 1$  är en lösning eftersom

$$3 \cdot 1^5 + \ln 1^4 = 3 + 0 = 3$$

Inga andra lösningar, eftersom

$f$  är strängt växande.

$$f'(x) = 15x^4 + \frac{4}{x}$$

b)  $f(x) = -2x^2 + 6, x \geq 0$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig och deriverbar.

$$f'(x) = -2 \cdot 2x = -4x \leq 0 \quad | \quad x \geq 0$$

Likheten gäller endast i den enstaka punkten  $x = 0$  och funktionen  $f$  är då strängt avtagande när  $x \geq 0$ .

Då existerar en invers funktion.  $\square$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(-2) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'(2)} \\ &= \frac{1}{-4 \cdot 2} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} -2 = f(x_0) \\ -2 = -2x^2 + 6 \\ 2x^2 = 8 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm\sqrt{4} \quad | \quad x \geq 0 \\ x = 2 \\ f'(x) = -4x \end{array} \right.$$

**Svar** a)  $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{19}$       b)  $(f^{-1})'(-2) = -\frac{1}{8}$

## 8

a) Den reella lösningen till ekvationen  $e^x + x - 2 = 0$  är samma som nollstället till funktionen  $f(x) = e^x + x - 2$ .

Vi visar att funktionen  $f(x) = e^x + x - 2$  har exakt ett nollställe

$$f'(x) = \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{1}_{>0} > 0 \quad \text{överallt}$$

1) Eftersom  $f'(x) > 0$  för alla  $x \in R$ , är funktionen  $f$  strängt växande och har då högst ett nollställe.

2) Eftersom

$$f(0) = e^0 + 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = e^1 + 1 - 1 = e - 1 > 0$$

$f$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[0,1]$  (den är en summa av en exponentialfunktion och ett polynom),

så ger Bolzanos sats att funktionen har åtminstone ett nollställe i intervallet  $]0,1[$ .

Av punkterna 1 och 2 följer att funktionen  $f$  har exakt ett nollställe och motsvarande ekvation  $e^x + x - 2 = 0$  har då exakt en reell lösning.  $\square$

Vi bestämmer ett närmevärde för lösningen med gaffelmetoden.

$x$	$f(x) = e^x + x - 2$	funktionen kontinuerlig i det slutna intervallet	nollställe $x_0$ i det öppna intervallet
0,5	$f(0,5) > 0$		
0,4	$f(0,4) < 0, \quad f(0,5) > 0$	$[0,4;0,5]$	$0,4 < x_0 < 0,5$
0,45	$f(0,45) > 0, \quad f(0,4) < 0$	$[0,4;0,45]$	$0,4 < x_0 < 0,45$
0,44	$f(0,44) < 0, \quad f(0,45) > 0$	$[0,44;0,45]$	$0,44 < x_0 < 0,45$
0,445	$f(0,445) > 0, \quad f(0,44) < 0$	$[0,44;0,445]$	$0,44 < x_0 < 0,445$

Dvs. lösningen är  $x_0 \approx 0,44$

b) Ekvationen  $\ln x = 2 - x$  är ekvivalent med ekvationen  $\ln x - 2 + x = 0$ .

Den reella lösningen till denna ekvation är samma som nollstället för funktionen  $f(x) = \ln x - 2 + x$ .

Vi visar att funktionen  $f$  har exakt ett nollställe

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0, \text{ eftersom } f \text{ är definierad endast}$$

när  $x > 0$ .

1) Eftersom  $f'(x) > 0$  för alla  $x > 0$  så är funktionen  $f$  strängt växande och har då högst ett nollställe.

2) Eftersom

$$f(1) = \ln 1 - 2 + 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = \ln 2 - 2 + 2 = \ln 2 = 0,693... > 0$$

$f$  är kontinuerligt i intervallet  $[1,2]$  (den är summan av en logaritm- och polynomfunktion),

så ger Bolzanos sats att funktionen  $f$  har åtminstone ett nollställe i intervallet  $]1,2[$ .

Av punkterna 1 och 2 följer att funktionen  $f$  har exakt ett nollställe och motsvarande ekvation  $\ln x = 2 - x$  har exakt en reell lösning.  $\square$

Vi bestämmer ett närmevärde för lösningen med gaffelmetoden.

$x$	$f(x) = \ln x - 2 + x$	funktionen kontinuerlig i det slutna intervallet	nollställe $x_0$ i det öppna intervallet
1,5	$f(1,5) < 0$		
1,6	$f(1,6) > 0, \quad f(1,5) < 0$	$[1,5;1,6]$	$1,5 < x_0 < 1,6$
1,55	$f(1,55) < 0, \quad f(1,6) > 0$	$[1,55;1,6]$	$1,55 < x_0 < 1,6$
1,56	$f(1,56) > 0, \quad f(1,55) < 0$	$[1,55;1,56]$	$1,55 < x_0 < 1,56$
1,555	$f(1,555) < 0, \quad f(1,56) > 0$	$[1,555;1,56]$	$1,555 < x_0 < 1,56$

Dvs. lösningen är  $x_0 \approx 1,56$

Svar a)  $x \approx 0,44$       b)  $x \approx 1,56$

**9**  
 $f : [-2, 0] \rightarrow [0, 16], f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$   
 Funktionen  $f$  en kontinuerlig polynomfunktion i det slutna intervallet  $[-2, 0]$  som är deriverbar i det öppna intervallet  $] -2, 0[$ .

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$= 4x(x^2 - 4)$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

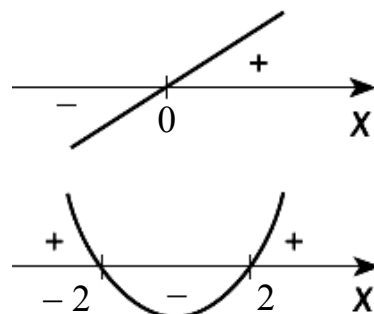
$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$|x \in ] -2, 0[$$

duger inte

Teckenschema:

$4x$	-
$x^2 - 4$	-
$f'(x)$	+
$f(x)$	
	-2      0 $x$



Eftersom derivatan är positiv i hela definitionsmängden är  $f$  strängt växande. Då existerar en invers funktion.  $\square$

Funktionens värdemängd:

Eftersom  $f$  är strängt växande och definierad i det slutna intervallet  $[-2, 0]$ , är funktionens

största värde  $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 16 = 16$  och

minsta värde  $f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 + 16 = 16 - 32 + 16 = 0$

Då  $f$  är kontinuerlig antar den alla värden mellan största och minsta värdet, dvs. funktionens värdemängd är  $V_f = [0, 16]$ .

Detta är på samma gång definitionsmängden för den inversa funktionen  $f^{-1}$

Vi bestämmer ett uttryck för den invers funktionen genom att lösa ekvationen

$$y = f(x)$$

$$y = x^4 - 8x^2 + 16$$

$$y = (x^2)^2 - 8x^2 + 16 \quad | \quad x^2 = t$$

$$y = t^2 - 8t + 16$$

$$t^2 - 8t + 16 - y = 0$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (16 - y)}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{4y}}{2} \quad \left| \begin{array}{l} y \in [0, 16] \text{ dvs. } 4y \geq 0 \\ t = x^2 \end{array} \right.$$

$$x^2 = \frac{8 \pm 2\sqrt{y}}{2}$$

$$x^2 = 4 \pm \sqrt{y} \quad \left| \begin{array}{l} x \in [-2, 0], \text{ och} \\ x^2 \in [0, 4] \end{array} \right.$$

$$x^2 = 4 - \sqrt{y} \quad \left| \begin{array}{l} 4 - \sqrt{y} \geq 0, \\ \text{eftersom } y \in [0, 16] \end{array} \right.$$

$$x = \pm \sqrt{4 - \sqrt{y}} \quad \left| x \in [-2, 0] \right.$$

$$x = -\sqrt{4 - \sqrt{y}}$$

Den inversa funktionen är  $f(y) = -\sqrt{4 - \sqrt{y}}$ ,  $y \in [0, 16]$

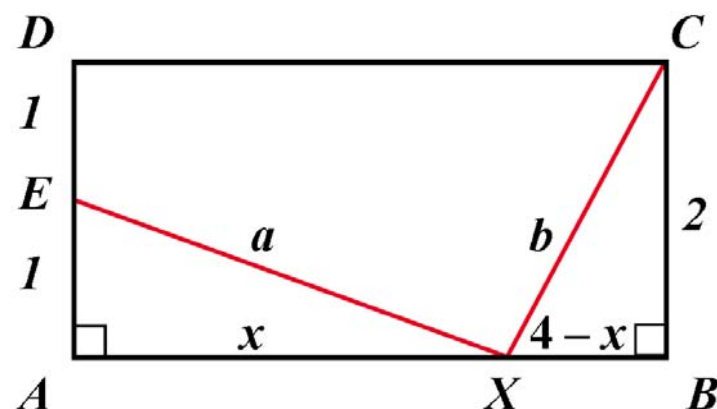
Genom att beteckna variabeln med bokstaven  $x$  får vi

$$f^{-1}: [0, 16] \rightarrow [-2, 0], \quad f(x) = -\sqrt{4 - \sqrt{x}}$$

**Svar**  $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - \sqrt{x}}$ ,  $0 \leq x \leq 16$

## 10

Vi ritar en figur



Längden av den brutna linjen  $EXC$  är

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 20}, \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Vi bestämmer för vilket värde på  $x$  som funktionen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 20}, \quad 0 \leq x \leq 4$$

antar sitt minsta (1°) och sitt största (2°) värde

- 1) Funktionen  $f$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[0, 4]$  och deriverbar i det öppna intervallet  $]0, 4[$ . Den antar då sitt

största och minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen (Fermats sats).

2) Derivatans nollställen

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-8x+20}) && | 0 < x < 4 \\
 &= D\sqrt{x^2+1} + D\sqrt{x^2-8x+20} \\
 &= D(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + D(x^2-8x+20)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{2}(x^2-8x+20)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-8) \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+20}}
 \end{aligned}$$

Vi får ekvationen

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+20}} &= 0 \\
 \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\geq 0}} &= \frac{4-x}{\underbrace{\sqrt{x^2-8x+20}}_{\geq 0}} && \left| \begin{array}{l} 0 < x < 4 \\ \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0 \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right. \\
 \frac{x^2}{x^2+1} &= \frac{(4-x)^2}{x^2-8x+20} \\
 x^2(x^2-8x+20) &= (x^2+1)(16-8x+x^2) \\
 \cancel{x^4} - \cancel{8x^3} + 20x^2 &= 16x^2 - \cancel{8x^3} + \cancel{x^4} + 16 - 8x + x^2
 \end{aligned}$$

$$3x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm 16}{6}$$

$$x = \frac{4}{3} \quad \text{eller} \quad x = -4 \quad | \quad 0 < x < 4$$

duger      duger inte

### 3) Funktionen värde i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 1} + \sqrt{0^2 - 8 \cdot 0 + 20} = 1 + \sqrt{20} = 1 + 2\sqrt{5} \approx 5,5$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 20} = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5 \quad (\text{minst})$$

$$f(4) = \sqrt{4^2 + 1} + \sqrt{4^2 - 8 \cdot 4 + 20} = \sqrt{17} + 2 \approx 6,1 \quad (\text{störst})$$

1° Den brutna linjen är kortast när  $x = \frac{4}{3}$  m.a.o. punkten  $X$  finns

på avståndet  $\frac{4}{3}$  från punkten  $A$  dvs.  $AX = \frac{4}{3}$

2° Den brutna linjen är kortast när  $x = 4$  m.a.o. punkten  $X = B$ .

## Prov 2

### 1

$$f(x) = x - 4 \quad \text{och} \quad g(x) = x^2 - 2$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && | \quad g(x) = x^2 - 2 \\ &= f(x^2 - 2) && | \quad f(x) = x - 4 \\ &= x^2 - 2 - 4 \\ &= x^2 - 6 \end{aligned}$$

Vi löser ekvation

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 0 \\ x^2 - 6 &= 0 \\ x^2 &= 6 \\ x &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

**Svar**  $x = \pm\sqrt{6}$

### 2

#### a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_3(1-x) - 10x && \left| \begin{array}{l} 1-x > 0 \text{ dvs. } x < 1 \\ s(x) = 1-x \text{ och } s'(x) = -1 \\ u(x) = \log_3 x \text{ och } u'(x) = \frac{1}{x \ln 3} \end{array} \right. \\ f'(x) &= \frac{1}{\underbrace{(1-x)\ln 3}_{u'(s(x))}} \cdot \underbrace{(-1)}_{s'(x)} - 10 \\ &= -\frac{1}{(1-x)\ln 3} - 10, \quad x < 1 \end{aligned}$$

#### Alternativ 2

$$\begin{aligned} D(\log_3(1-x) - 10x) &&& \left| \begin{array}{l} 1-x > 0 \text{ dvs. } x < 1 \\ \text{basbyte:} \\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{array} \right. \\ &= D\left[\frac{\ln(1-x)}{\ln 3}\right] - D(10x) \\ &= D\left[\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln(1-x)\right] - 10 && \left| \begin{array}{l} \text{utflyttning av konstant:} \\ D(cf(x)) = cDf(x) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\ln 3} \cdot \underbrace{D[\ln(1-x)]}_{u'(s(x))} - 10 & \left| \begin{array}{l} s(x) = 1-x \quad \text{och} \quad s'(x) = -1 \\ u(x) = \ln x \quad \text{och} \quad u'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right. \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{s'(x)} \right] - 10 \\
 &= -\frac{1}{(1-x) \cdot \ln 3} - 10, \quad x < 1
 \end{aligned}$$

Derivatans nollställen:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{(1-x) \cdot \ln 3} - 10 \\
 &= -\left( \underbrace{\frac{1}{(1-x) \cdot \ln 3}}_{>0} + \underbrace{10}_{>0} \right) < 0, \quad \text{när } x < 1
 \end{aligned}$$

Derivatans nollställen antar endast negativa värden i sin definitionsmängd och saknar då nollställen.

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)^3}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1$$

Funktionen  $f$  är en kontinuerlig och deriverbar rationell funktion.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{D1 \cdot x^2(x-1)^3 - D[x^2(x-1)^3] \cdot 1}{[x^2(x-1)^3]^2} \\
 &= \frac{-(2x \cdot (x-1)^3 + 3(x-1)^2 \cdot 1 \cdot x^2)}{x^4(x-1)^6} \\
 &= \frac{-(x-1)^2(2x \cdot (x-1) + 3x^2)}{x^4(x-1)^6} \\
 &= \frac{-(x-1)^2(5x^2 - 2x)}{x^4(x-1)^6} \\
 &= \frac{-x(x-1)^2(5x-2)}{x^4(x-1)^6}
 \end{aligned}$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-x(x-1)^2(5x-2)}{x^4(x-1)^6} = 0$$

$$-x = 0 \quad \text{eller} \quad (x-1)^2 = 0 \quad \text{eller} \quad 5x-2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{2}{5}$$

duger inte                  duger inte                  duger

c)

$$f(x) = 3 - x \cdot e^{2x^2+5x-7} \quad \left| \quad D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f \right.$$

$$f'(x) = 0 - \left[ (Dx) \cdot e^{2x^2+5x-7} + (De^{2x^2+5x-7}) \cdot x \right]$$

$$= - \left[ 1 \cdot e^{2x^2+5x-7} + (De^{2x^2+5x-7}) \cdot x \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} s(x) = 2x^2 + 5x - 7 \\ \text{och } s'(x) = 4x + 5 \\ u(x) = e^x \quad \text{och} \\ u'(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$= -e^{2x^2+5x-7} - \underbrace{e^{2x^2+5x-7}}_{u'(s(x))} \underbrace{(4x+5)}_{s'(x)} \cdot x$$

$$= e^{2x^2+5x-7} (-1 - 4x^2 - 5x)$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

$$\underbrace{e^{2x^2+5x-7}}_{>0} (-1 - 4x^2 - 5x) = 0$$

$$-1 - 4x^2 - 5x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{8}$$

$$x = \frac{-2}{8} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-8}{8}$$

$$x = -\frac{1}{4} \quad \text{eller} \quad x = -1$$

**Svar** a) Inga nollställen

b)  $x = \frac{2}{5}$

c)  $x = -1$  eller  $x = -\frac{1}{4}$

3

a)

$$\underbrace{\sqrt{x-45}}_{\geq 0} = \underbrace{7}_{\geq 0}$$

$x \geq 45$   
Om  $a \geq 0$  och  $b \geq 0$ ,  
så är  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ .

$$(\sqrt{x-45})^2 = 7^2$$

$$x - 45 = 49$$

$$x = 94$$

$x \geq 45$

duger

b)

$$\underbrace{\sqrt{53-x}}_{\geq 0} > \underbrace{8}_{\geq 0}$$

$53 - x \geq 0$ , dvs.  $x \leq 53$   
Om  $a \geq 0$  och  $b \geq 0$ ,  
så är  $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ .

$$(\sqrt{53-x})^2 > 8^2$$

$$53 - x > 64$$

$$-x > 11$$

$\cdot (-1) (< 0)$

$$x < -11$$

$x \leq 53$

duger

c)

$$5^{-x} = \frac{1}{25}$$

$x \in \mathbb{R}$

Vi skriver båda leden  
med samma bas.

$$5^{-x} = \frac{1}{5^2}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$5^{-x} = 5^{-2}$$

Exponentialfunktionen  $5^x$  är *strängt växande* och likheten bevaras.

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

d)

$$4^{1-x} = 16 \cdot 5^x \quad | :16$$

$$\frac{4^{1-x}}{16} = 5^x$$

$$\frac{4^{1-x}}{4^2} = 5^x$$

$$4^{1-x-2} = 5^x$$

Logaritmfunktionen  $\lg$  är *strängt växande* och likheten bevaras.

$$\lg 4^{-1-x} = \lg 5^x$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$(-1-x)\lg 4 = x\lg 5$$

$$-\lg 4 - x \lg 4 = x \lg 5$$

$$-\lg 4 = x \lg 5 + x \lg 4$$

$$x(\lg 4 + \lg 5) = -\lg 4 \quad \left| \log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \right.$$

$$x \lg(4 \cdot 5) = -\lg 4$$

$$x \lg 20 = -\lg 4 \quad \left| : \lg 20 \right.$$

$$x = -\frac{\lg 4}{\lg 20} (\approx -0,46)$$

- Svar**
- |             |  |
|-------------|--|
| a) $x = 94$ | b) $x < 11$                                    |
| c) $x = 2$  | d) $x = -\frac{\lg 4}{\lg 20} (\approx -0,46)$ |

4

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a, & x < 0 \\ xe^{3x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Funktionen  $f_1(x) = -2x + a$  (polynomfunktion) och funktionen  $f_2(x) = xe^{3x} + 1$  (produkten av en polynomfunktion och en exponentialfunktion + en konstant) är kontinuerliga i sin definitionsmängd. Det räcker då att undersöka funktionen i  $x = 0$ , där funktionsuttrycket byter.

Vi beräknar funktionsvärdet och de ensidiga gränsvärdena för  $x = 0$ .

$$f(0) = 0 \cdot e^{3 \cdot 0} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + a) = -2 \cdot 0 + a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot e^{3x} + 1) = 0 \cdot e^{3 \cdot 0} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig för  $x = 0$  om

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Vi får ekvation

$$a = 1$$

Dvs. funktionen är kontinuerlig om  $a = 1$ .

**Svar**  $a = 1$

5

$$f(x) = x^3 e^x$$

Teckenschema och extremvärden:

$$f(x) = x^3 e^x \quad | \quad D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 e^x + x^3 e^x \\ &= x^2 e^x (x+3) \end{aligned}$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

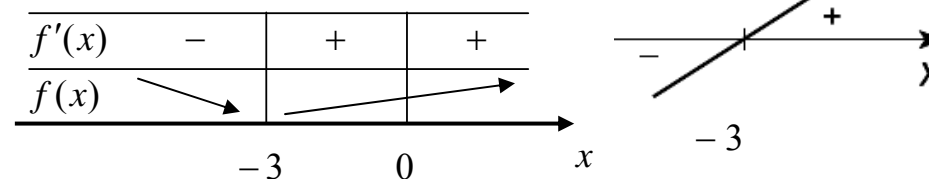
$$x^2 e^x (x+3) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{eller} \quad e^x = 0 \quad \text{eller} \quad x+3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad e^x > 0 \text{ (alltid sant)} \quad \text{eller} \quad x = -3$$

Teckenschema:

Eftersom  $e^x > 0$  och  $x^2 \geq 0$  så bestämmer uttrycket  $x+3$  derivatans tecken.



minimi-  
ställe

Funktionen  $f(x) = x^3 e^x$  är en produkt av två kontinuerliga funktioner och är då kontinuerlig. Ur teckenschemat kan vi se att  $f$  antar sitt minsta värde i  $x = -3$ .

$$f(-3) = (-3)^2 e^{-3} = -\frac{27}{e^3}$$

När  $x$  växer obegränsat så växer  $x^3$  och  $e^x$  obegränsat och då växer också  $f(x) = x^3 e^x$  obegränsat. Värdeområdet till den kontinuerliga funktionen  $f$  är då  $V_f = \left[ -\frac{27}{e^3}, \infty \right)$ .

**Svar**  $V_f = \left[ -\frac{27}{e^3}, \infty \right)$

## 6

### Bevis.

Vi löser ekvation

$$\underbrace{\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}}_{\geq 0} \quad \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right\}$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$(\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}} + \left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x + \cancel{8} + \frac{16}{x} = 3 + \cancel{8} + \frac{16}{3} \quad | \cdot 3x (> 0)$$

$$3x^2 + 48 = 9x + 16x$$

$$3x^2 - 25x + 48 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48}}{2 \cdot 3} = \frac{25 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{16}{3} \text{ eller } x = 3$$

Dvs. ekvationen har en annan reell lösning  $x = \frac{16}{3} \neq 3$ .  $\square$

### Alternativ 2

#### Bevis.

De reella lösningarna till ekvationen  $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$  dvs.

till ekvationen  $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} = 0$  är samma som nollställena

till funktionen  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$ . Dvs. vi skall visa att

funktionen  $f$  förutom nollstället  $x = 3$  har åtminstone ett annat nollställe.

Eftersom

- $f(4) = \sqrt{4} + \frac{4}{\sqrt{4}} - \sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} \approx -0,04 < 0$

- $f(9) = \sqrt{9} + \frac{4}{\sqrt{9}} - \sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 0,29 > 0$

- $f$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[4, 9]$

så har funktionen  $f$  åtminstone ett nollställe i det öppna intervallet  $]4, 9[$  (Bolzanos sats) som är olika 3. Då har

ekvationen  $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$  åtminstone ett reellt nollställe

som är olika 3.  $\square$

7

$$f(x) = 3x^5 - 2x + 1, \quad x < -1$$

Funktionen  $f$  är en kontinuerlig och deriverbar polynomfunktion.

$$f'(x) = \underbrace{15x^4}_{>15} - 2 > 0 \quad \left| \begin{array}{l} x < -1 \\ x^4 > 1 \end{array} \right.$$

Eftersom derivatan är kontinuerlig i hela definitionsmängden, så är funktionen  $f$  strängt växande och har en invers funktion.

Derivatan till den inversa funktionen  $f^{-1}$  i  $x = -91$ :

$$(f^{-1})'(-91) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{f'(-2)} \\ &= \frac{1}{15 \cdot (-2)^4 - 2} \\ &= \frac{1}{238} \end{aligned}$$

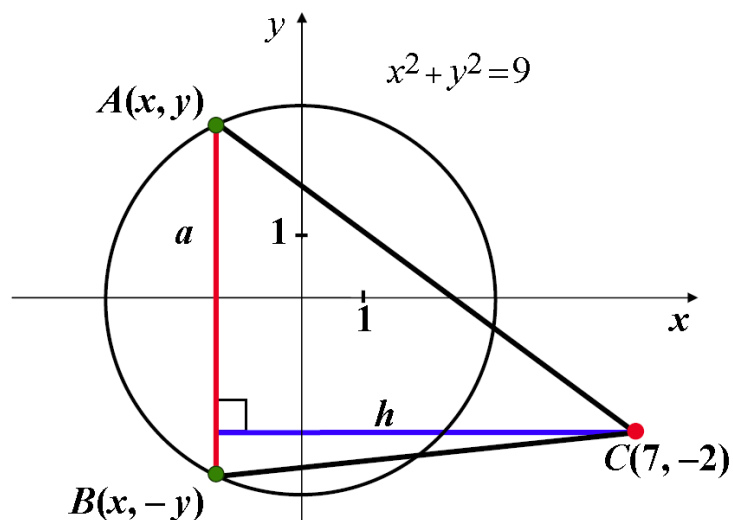
**Svar**  $\frac{1}{238}$

$$\begin{aligned} -91 &= f(x_0) \\ -91 &= 3x_0^5 - 2x_0 + 1 \\ 3x_0^5 - 2x_0 + 92 &= 0 \\ x_0 = -2 &\text{ är en lösning eftersom} \\ 3 \cdot (-2)^5 - 2 \cdot (-2) + 92 & \\ = -96 + 4 + 92 &= 0 \\ \text{Inga andra lösningar, eftersom} & \\ f \text{ är strängt växande} & \end{aligned}$$

$$f'(x) = 15x^4 - 2$$

## 8

Vi ritar en figur.



$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3$$

Då är  $A = (x, y) = (x, \sqrt{9 - x^2})$  och  $B = (x, -y) = (x, -\sqrt{9 - x^2})$ .

Basen i triangeln  $ABC$  är

$$a = AB = 2y = 2\sqrt{9 - x^2},$$

höjden är

$$h = 7 - x$$

och arean är

$$A(x) = \frac{2\sqrt{9 - x^2} \cdot (7 - x)}{2} = (7 - x)\sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3$$

1) Funktionen  $A$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[-3, 3]$ , deriverbar i det öppna intervallet  $] -3, 3 [$  och antar då sitt största värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen (Fermats sats).

2) Derivatans nollställen

$$\begin{aligned} A'(x) &= D[(7 - x)\sqrt{9 - x^2}] & | D(f \cdot g) &= (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f \\ &= -1 \cdot \sqrt{9 - x^2} + (D\sqrt{9 - x^2}) \cdot (7 - x) & \left| \begin{array}{l} -3 < x < 3, \\ \text{och } 9 - x^2 > 0 \end{array} \right. \\ &= -\sqrt{9 - x^2} + D(9 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (7 - x) \\ &= -\sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \cdot (7 - x) \\ &= -\sqrt{9 - x^2} - \frac{x \cdot (7 - x)}{\sqrt{9 - x^2}} \\ &= \frac{-(9 - x^2) - x \cdot (7 - x)}{\sqrt{9 - x^2}} \\ &= \frac{2x^2 - 7x - 9}{\sqrt{9 - x^2}} \end{aligned}$$

Vi får ekvation

$$A'(x) = 0$$

$$\frac{2x^2 - 7x - 9}{\sqrt{9 - x^2}} = 0$$

$$2x^2 - 7x - 9 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 11}{4}$$

$$x = 4\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = -1 \quad | \quad -3 < x < 3$$

duger inte      duger

### 3) Funktionens värde i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen

$$A(-3) = 0$$

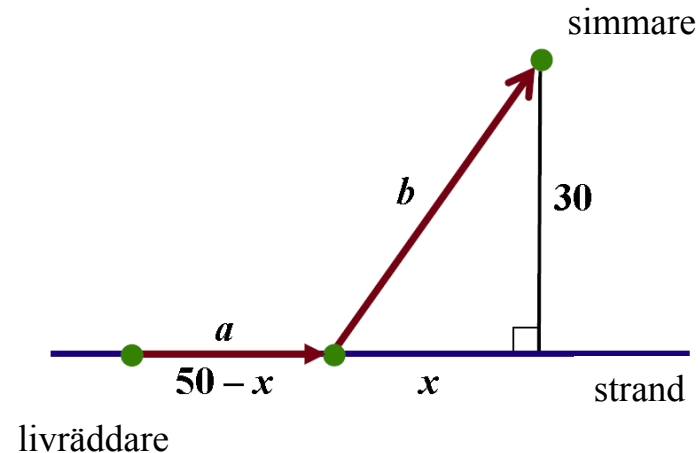
$$A(-1) = [7 - (-1)]\sqrt{9 - (-1)^2} = 8 \cdot \sqrt{8} = 16\sqrt{2} \quad (\text{störst})$$

$$A(3) = 0$$

**Svar**  $16\sqrt{2}$

## 9

Vi ritar en figur.



Anta att simhastigheten är  $v$  och att löphastigheten är  $3v$ . Den tid det tar för livräddaren att komma till simmaren är

$$t = \frac{a}{3v} + \frac{b}{v} = \frac{50 - x}{3v} + \frac{\sqrt{x^2 + 30^2}}{v}$$

$$= \frac{1}{v} \left[ \frac{50 - x}{3} + \sqrt{x^2 + 900} \right], \quad 0 \leq x \leq 50$$

Tiden är kortast när funktionen

$$f(x) = \frac{50 - x}{3} + \sqrt{x^2 + 900}, \quad 0 \leq x \leq 50 \quad \text{antar sitt minsta värde,}$$

eftersom  $\frac{1}{v}$  är en positiv konstant.

1) Funktionen  $f$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[0,50]$ , deriverbar i det öppna intervallet  $]0,50[$  och antar då sitt minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen (Fermats sats).

2) **Derivatans nollställen**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D\left[\frac{50}{3} - \frac{1}{3}x + \sqrt{x^2 + 900}\right] \quad | \quad 0 < x < 50 \\
 &= 0 - \frac{1}{3} + D(x^2 + 900)^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(x^2 + 900)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}}
 \end{aligned}$$

Vi får ekvation

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 -\frac{1}{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} &= 0 \\
 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{3x}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{x^2 + 900}}_{\geq 0}$$

$0 < x < 50$   
Om  $a \geq 0$  och  $b \geq 0$ ,  
så är  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ .

$$9x^2 = x^2 + 900$$

$$8x^2 = 900$$

$$x^2 = \frac{900}{8}$$

$$x = (\pm) \frac{30}{\sqrt{8}}$$

3) **Funktionens värde i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen**

$$f(0) \approx 47$$

$$f\left(\frac{30}{\sqrt{8}}\right) \approx 45 \quad (\text{minst})$$

$$f(50) \approx 58$$

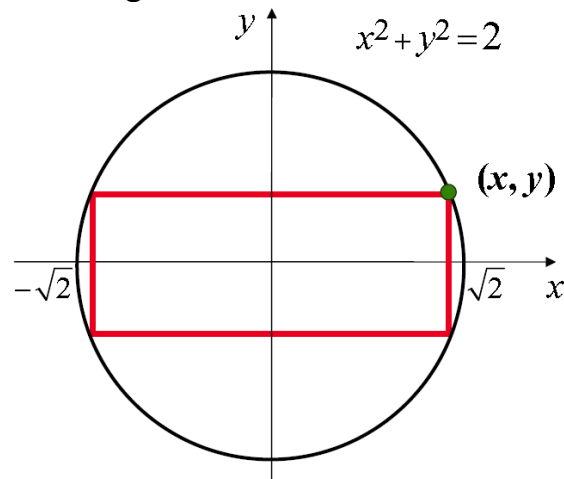
Livräddaren bör alltså springa  $50 - \frac{30}{\sqrt{8}} \approx 39$  meter.

**Svar** 39 meter

10

$$x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow y^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

Vi ritar en figur.



Rektangels omkrets är

$$p = 4x + 4y \quad \left| \begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 < y < \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$= 4x + 4\sqrt{2 - x^2}$$

Vi bestämmer största värde för funktionen

$$p(x) = 4x + 4\sqrt{2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Definitionsmängden innehåller också intervallets ändpunkter  $x = 0$  och  $x = \sqrt{2}$

1) Funktionen  $p$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[0, \sqrt{2}]$ , deriverbar i det öppna intervallet  $]0, \sqrt{2}[$  och antar då sitt största värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen

2) **Derivatans nollställen**

$$p'(x) = D(4x + 4\sqrt{2 - x^2}) \quad | \quad 0 < x < \sqrt{2}$$

$$= 4 + 4 \cdot D(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} (2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= 4 - \frac{4x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2 - x^2} - 4x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

Vi får ekvationen

$$p'(x) = 0$$

$$\frac{4\sqrt{2 - x^2} - 4x}{\sqrt{2 - x^2}} = 0$$

$$4\sqrt{2 - x^2} - 4x = 0 \quad | :4$$

$$\sqrt{2 - x^2} - x = 0$$

$$\sqrt{\underbrace{2-x^2}_{\geq 0}} = \underbrace{x}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{2} \\ \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$2 - x^2 = x^2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = (\pm)1 \quad \left| \begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{2} \end{array} \right.$$

**3) Funktionens värde i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen**

$$p(0) = 4\sqrt{2}$$

$$p(1) = 4 \cdot 1 + 4 \cdot \sqrt{2-1^2} = 8 \quad (\text{störst})$$

$$p(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2 - (\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

Omkretsens största värde är 8.

**Svar** 8

### Prov 3

1

$$3 \cdot 3^{4x} \cdot 3^{x^2-1} = \frac{1}{27}$$

$$x \in R$$

Vi skriver båda leden  
med samma bas.

$$3^1 \cdot 3^{4x} \cdot 3^{x^2-1} = \frac{1}{3^3}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$3^{1+4x+x^2-1} = 3^{-3}$$

$$3^{x^2+4x} = 3^{-3}$$

Exponentialfunktionen  $3^x$  är *strängt växande* och likheten bevaras.

$$x^2 + 4x = -3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1 \text{ eller } x = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x = -1 \text{ eller } x = -3$$

**Svar**  $x = -3$  eller  $x = -1$

2

$$f(x) = x^2(x-1)^{-5}, \quad x \neq 1$$

Funktionen  $f$  är en kontinuerlig och deriverbar rationell funktion.

$$f'(x) = D[x^2(x-1)^{-5}] \quad | \quad D(fg) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f$$

$$= 2x \cdot (x-1)^{-5} + (-5)(x-1)^{-6} \cdot 1 \cdot x^2$$

$$= \frac{2x}{(x-1)^5} - \frac{5x^2}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{2x(x-1) - 5x^2}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{-3x^2 - 2x}{(x-1)^6}$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-3x^2 - 2x}{(x-1)^6} = 0$$

$$-3x^2 - 2x = 0$$

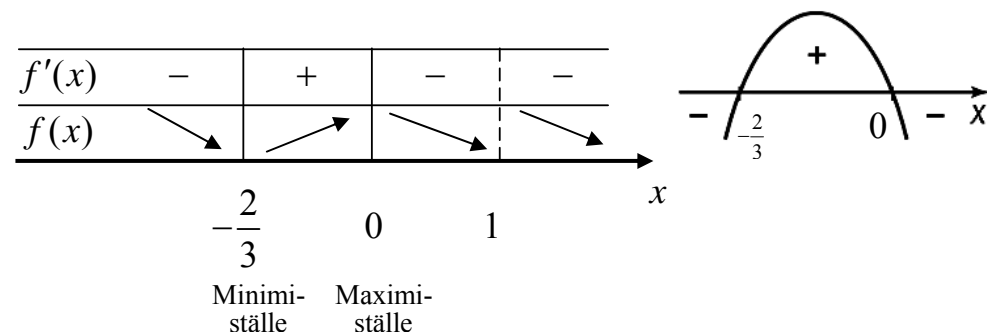
$$x(-3x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } -3x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Teckenschema:

Täljaren bestämmer derivatans tecken, eftersom nämnaren alltid är positiv när  $x \neq 1$



Enligt teckenschemat är funktionen  $f$  strängt växande när  $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$ .

Eftersom  $-10^{999} < -10^{998} < -\frac{2}{3}$  och  $f$  är strängt avtagande är  $f(-10^{999}) > f(-10^{998})$ .

**Svar** Funktionen  $f$  är växande i intervallet  $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$ .  
 $f(-10^{998})$  är minst.

**3**

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x > -1$$

$$\bullet \quad f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\bullet \quad f'(x) = D\sqrt{x+1}$$

$$= D(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{1}_{s'(x)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

$$\bullet \quad f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

**Svar**  $f(2) = \sqrt{3}$

$$f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$x > -1$ , och

$$\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$s(x) = x+1 \quad \text{och} \quad s'(x) = 1$$

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{och} \quad u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

4

a)

$$f(x) = e^{x^2} + 2x \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = x^2 \quad \text{och} \quad s'(x) = 2x \\ u(x) = e^x \quad \text{och} \quad u'(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{e^{x^2}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{2x}_{s'(x)} + 2 \\ &= 2xe^{x^2} + 2 \end{aligned}$$

Tangentens riktningskoefficient är

$$k_t = f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2} + 2 = 2$$

Tangentens ekvation är

$$\begin{array}{l} y - 1 = 2(x - 0) \\ y = 2x + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0) \\ (x_0, y_0) = (0, 1) \end{array} \right.$$

b)

$$f(x) = \ln x^2 \quad \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ s(x) = x^2 \quad \text{och} \quad s'(x) = 2x \\ u(x) = \ln x \quad \text{och} \quad u'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\underbrace{x^2}_{u'(s(x))}} \cdot \underbrace{2x}_{s'(x)} = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

Tangentens riktningskoefficient är

$$k_t = f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$

Tangentens ekvation är

$$\begin{array}{l} y - 0 = 2(x - 1) \\ y = 2x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0) \\ (x_0, y_0) = (1, 0) \end{array} \right.$$

**Svar** a)  $y = 2x + 1$

b)  $y = 2x - 2$

5

a)

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$

$$g(x) = x - 2$$

$$1^\circ (f \circ g)(x)$$

$$= f(g(x)) \quad | \quad g(x) = x - 2$$

$$= f(x - 2) \quad | \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 1$$

$$= \frac{1}{3^{x-2}} - 1 \quad | \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$= 3^{2-x} - 1$$

$$\text{Dvs. } (f \circ g)(x) = 3^{2-x} - 1$$

$$2^\circ (g \circ f)(x)$$

$$= g(f(x)) \quad | \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$

$$= g\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1\right) \quad | \quad g(x) = x - 2$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 - 2$$

$$= \frac{1}{3^x} - 3 \quad | \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$= 3^{-x} - 3$$

$$\text{Dvs. } (g \circ f)(x) = 3^{-x} - 3$$

$$3^\circ (g \circ g \circ g)(x)$$

$$= g(g(g(x))) \quad | \quad g(x) = x - 2$$

$$= g(g(x - 2)) \quad | \quad g(x) = x - 2$$

$$= g((x - 2) - 2) \quad | \quad g(x) = x - 2$$

$$= ((x - 2) - 2) - 2$$

$$= (x - 2 - 2) - 2$$

$$= x - 4 - 2$$

$$= x - 6$$

$$\text{Dvs. } (g \circ g \circ g)(x) = x - 6$$

<p><b>b)</b> <math>(f \circ g)(x) \geq f(x) + 72</math></p> $3^{2-x} - 1 \geq 3^{-x} - 1 + 72$ $3^{-x+2} \geq 3^{-x} + 72$ $3^2 \cdot 3^{-x} - 3^{-x} \geq 72$ $3^{-x}(9-1) \geq 72$ $3^{-x} \geq 9$	$(f \circ g)(x) = 3^{2-x} - 1$ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = 3^{-x} - 1$ $x \in R$ Vi skriver båda leden med samma bas. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $a^r \geq a^s \Leftrightarrow r \geq s$ (eftersom $a > 1$ ) $3^{-x} \geq 3^2$ $-x \geq 2$ $x \leq -2$
--	---

- Svar** a) 1°  $(f \circ g)(x) = 3^{2-x} - 1$   
 2°  $(g \circ f)(x) = 3^{-x} - 3$   
 3°  $(g \circ g \circ g)(x) = x - 6$

b)  $x \leq -2$

**6**

**a)**

$$x = \sqrt{x} + 110 \quad | x \geq 0$$

Ekvationen har lösningar  
endast om:

$$x \geq 0 \text{ och } x - 110 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 0 \text{ och } x \geq 110$$

Dvs. om  $x \geq 110$

Om  $a \geq 0$  och  $b \geq 0$ ,

så är  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ .

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} = \underbrace{x - 110}_{\geq 0}$$

$$(\sqrt{x})^2 = (x - 110)^2$$

$$x = x^2 - 220x + 12100$$

$$x^2 - 221x + 12100 = 0$$

$$x = \frac{221 \pm \sqrt{(-221)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12100}}{2 \cdot 1} = \frac{221 \pm 21}{2}$$

$$x = 121 \text{ eller } x = 100 \quad | x \geq 110$$

Dvs.  $x = 121$ .

Observera: Vi kan också lösa ekvationen  $\sqrt{x} = x - 110$  genom att kvadrera bägge leden utan att undersöka villkoren för kvadreringen. Vi bör då minnas att kontrollera lösningarna genom insättning i den ursprungliga ekvationen innan vi skriver svaret.

b)

$$\ln \sqrt{x-1} + \ln \sqrt{2x-1} - \ln \sqrt{27} + \ln 3 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x-1 > 0 \quad \text{och} \quad 2x-1 > 0 \\ x > 1 \quad \text{och} \quad x > \frac{1}{2} \\ \text{Dvs. } x > 1 \end{array} \right.$$

$$\ln \sqrt{x-1} + \ln \sqrt{2x-1} = \ln \sqrt{27} - \ln 3 \quad \left| \begin{array}{l} \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y) \\ \log_a x - \log_a y = \log_a \left( \frac{x}{y} \right) \end{array} \right.$$

$$\ln(\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-1}) = \ln\left(\frac{\sqrt{27}}{3}\right) \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \end{array} \right.$$

$$\ln \sqrt{(x-1)(2x-1)} = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\ln \sqrt{2x^2 - x - 2x + 1} = \ln \sqrt{3}$$

$$\underbrace{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{3}}_{\geq 0}$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 3$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Funktionen  $\ln$  är *strängt växande* eftersom basen  $e > 1$ . Likheten bevaras.

Funktionen  $x^2$  är *strängt växande* när  $x \geq 0$  och likheten bevaras.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x = 2 \quad \text{eller} \quad x = -\frac{1}{2} \quad | \quad x > 1$$

duger      duger inte

Ekvationens lösning är  $x = 2$

**Svar**   a)  $x = 121$       b)  $x = 2$

7

$$f(x) = x^3 + 3x + 2$$

Funktionen  $f$  är en kontinuerlig och deriverbar polynomfunktion.

Derivatan  $f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\geq 0} + 3 > 0$ , vilket ger att  $f$  är strängt

växande och har en invers funktion.

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$2 = f(x_0)$$

$$2 = x_0^3 + 3x_0 + 2$$

$$x_0^3 + 3x_0 = 0$$

$$x_0(x_0^2 + 3) = 0$$

$$x_0 = 0 \text{ eller } x_0^2 + 3 = 0$$

$$x_0^2 = -3$$

lösning saknas

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

**Svar**  $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3}$

8

**Påstående** Ekvationen  $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$  har exakt en reell lösning.

**Bevis**

De reella lösningarna till ekvationen  $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$  är samma som nollställena till funktionen

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1, \quad x \geq 0$$

Vi visar då att funktionen  $f$  har exakt ett nollställe.

Vi studerar derivatans teckenschema:

Funktionen  $f$  är kontinuerlig i intervallet  $[0, \infty[$  och deriverbar i intervallet  $]0, \infty[$  och dess derivata är

$$f'(x) = D(x^2 - \sqrt{x} - 1) \quad | \quad x > 0$$

$$= 2x - Dx^{\frac{1}{2}} - 0$$

$$= 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivatans nollställena:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\underbrace{2x}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\geq 0}$$

$x > 0$   
Om  $a \geq 0$  och  $b \geq 0$ ,  
så är  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ .

$$4x^2 = \frac{1}{4x}$$

$\cdot 4x (\neq 0)$

$$16x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{16}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \approx 0,4 \quad | x > 0$$

duger

Teckenschema:

Derivatans tecken är kontinuerligt och vi kan bestämma dess tecken med testpunkter

$f'(x)$	-	+	$x$	$f'(x)$
$f(x)$	↘ ↗		0	0,1
			$\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$	1
				-
				+

Eftersom

- Funktionen  $f$  är kontinuerlig
- $f(0) = -1 < 0$
- $f(4) = 4^2 - \sqrt{4} - 1 = 16 - 2 - 1 = 13 > 0$

har funktionen enligt teckenschemat exakt ett nollställe i intervallet  $\left] \frac{1}{\sqrt[3]{16}}, \infty \right[$ . □

Vi söker ett nollställe med 2 decimaler till denna funktion. Nollstället är på samma gång den enda reella lösningen till ekvationen  $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ . Vi använder gaffelmetoden.

$x$	$f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$	$f$ kontinuerlig i det slutna intervallet	nollställe $x_0$ i det öppna intervallet
1	$f(1) < 0$		
2	$f(2) > 0, f(1) < 0$	$[1, 2]$	$1 < x_0 < 2$
1,5	$f(1,5) > 0, f(1) < 0$	$[1; 1,5]$	$1 < x_0 < 1,5$
1,45	$f(1,45) < 0, f(1,5) > 0$	$[1,45; 1,5]$	$1,45 < x_0 < 1,5$
1,49	$f(1,49) < 0, f(1,5) > 0$	$[1,49; 1,5]$	$1,49 < x_0 < 1,5$
1,494	$f(1,494) > 0, f(1,49) < 0$	$[1,49; 1,494]$	$1,49 < x_0 < 1,494$

Ett närmevärde med 2 decimaler till lösningen är  $x \approx 1,49$ .

**Svar**  $x \approx 1,49$

## 9

**a) Observationer:**    år 1995    200 sälar  
                                   år 1999    220 sälar

Vi betecknar den årliga tillväxten med  $k$ .  
 Antalet sälar  $k$ -faldigas på ett år och efter fyra år har den ökat  
 med faktorn  $k^4$ .

Vi får ekvation

$$k^4 \cdot 200 = 220 \quad | : 200$$

$$\underbrace{k^4}_{>0} = \underbrace{\frac{220}{200}}_{>0}$$

Funktionen  $x^{\frac{1}{4}}, x > 0$  är *strängt*  
*växande* och likheten bevaras  
 .

$$(k^4)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$k = \left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$k = 1,0241136... \approx 1,02411$$

Den årliga tillväxtprocenten är

$$(k - 1) \cdot 100 = 2,411... \approx 2,4 \%$$

b) Antalet sälar 1,011-faldigas på ett år.  
Om antalet sälar på  $x$  år ökar från 170 till 200, får vi ekvation

$$1,011^x \cdot 170 = 200$$

$$1,011^x = \frac{200}{170}$$

Funktionen  $\lg$  är  
*strängt växande* och  
likheten bevaras.

$$\lg 1,011^x = \lg \frac{20}{17}$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$x \lg 1,011 = \lg \frac{20}{17}$$

$$: \lg 1,011$$

$$x = \frac{\lg \frac{20}{17}}{\lg 1,011}$$

$$x = 14,855\dots$$

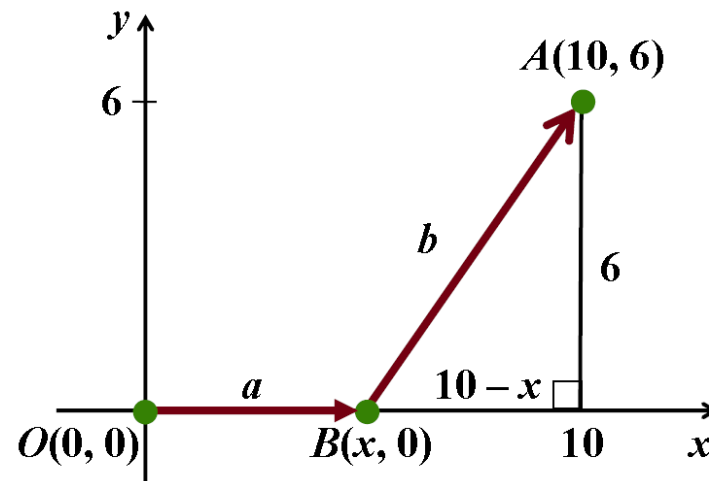
$$1995 - x = 1980,144\dots \approx 1980$$

Observationen gjordes år 1980.

**Svar** a) 2,4 % per år      b) år 1980

**10**

Vi ritar figur



Sträckan  $OBA$  tar tiden

$$\begin{aligned} t &= \frac{a}{1,25v} + \frac{b}{v} \\ &= \frac{x}{1,25v} + \frac{\sqrt{(10-x)^2 + 6^2}}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left( \frac{4}{5}x + \sqrt{100 - 20x + x^2 + 36} \right) \\ &= \frac{1}{v} \left( \frac{4}{5}x + \sqrt{x^2 - 20x + 136} \right) \end{aligned}$$

Tiden är kortast när funktionen

$$f(x) = \frac{4}{5}x + \sqrt{x^2 - 20x + 136}, \quad 0 \leq x \leq 10$$

antar sitt minsta värde eftersom  $\frac{1}{v}$  är en positiv konstant.

1) Funktionen  $f$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[0,10]$ , deriverbar i det öppna intervallet  $]0,10[$  och antar då sitt minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen (Fermats sats).

2) Derivatans nollställen

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left(\frac{4}{5}x + \sqrt{x^2 - 20x + 136}\right) \quad | \quad 0 < x < 10 \\ &= \frac{4}{5} + D(x^2 - 20x + 136)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{1}{2}(x^2 - 20x + 136)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 20) \\ &= \frac{4}{5} + \frac{x - 10}{\sqrt{x^2 - 20x + 136}} \end{aligned}$$

Vi får ekvationen

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4}{5} + \frac{x - 10}{\sqrt{x^2 - 20x + 136}} = 0$$

$$\frac{x - 10}{\sqrt{x^2 - 20x + 136}} = -\frac{4}{5}$$

$$\underbrace{-5x + 50}_{\geq 0} = \underbrace{4\sqrt{x^2 - 20x + 136}}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} 0 < x < 10 \\ \text{Om } a \geq 0 \text{ och } b \geq 0, \\ \text{så är } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$(-5x + 50)^2 = (4\sqrt{x^2 - 20x + 136})^2$$

$$25x^2 - 500x + 2500 = 16x^2 - 320x + 2176$$

$$9x^2 - 180x + 324 = 0 \quad | :9$$

$$x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 16}{2}$$

$$x = 18 \quad \text{eller} \quad x = 2 \quad | \quad 0 < x < 10$$

duger inte                  duger

**3) Funktionens värde i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen**

$$f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + \sqrt{0^2 - 20 \cdot 0 + 136} \approx 11,66$$

$$f(2) = \frac{4}{5} \cdot 2 + \sqrt{2^2 - 20 \cdot 2 + 136} \approx 11,6 \quad (\text{minst})$$

$$f(10) = \frac{4}{5} \cdot 10 + \sqrt{10^2 - 20 \cdot 10 + 136} = 14$$

Dvs. tiden är kortast när  $x = 2$  och då är  $B = (2, 0)$ .

Kortaste väg är  $(0,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (10,6)$ .

**Svar**  $(0,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (10,6)$