

Prov 1**1**

$$\text{a) } \underbrace{D \sin 3x}_{u(s(x))} \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = 3x \quad \text{och} \quad s'(x) = 3 \\ u(x) = \sin x \quad \text{och} \quad u'(x) = \cos x \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\cos 3x}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{3}_{s'(x)}$$

$$= 3 \cos 3x$$

b)

$$D \sin^3 x \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = \sin x \quad \text{och} \quad s'(x) = \cos x \\ u(x) = x^3 \quad \text{och} \quad u'(x) = 3x^2 \end{array} \right.$$

$$= D(\underbrace{\sin x}_{u(s(x))})^3$$

$$= 3(\underbrace{\sin x}_{u'(s(x))})^2 \cdot \underbrace{\cos x}_{s'(x)}$$

$$= 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\text{c) } \underbrace{D \sin x^3}_{u(s(x))} \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = x^3 \quad \text{och} \quad s'(x) = 3x^2 \\ u(x) = \sin x \quad \text{och} \quad u'(x) = \cos x \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\cos x^3}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{s'(x)}$$

$$= 3x^2 \cos x^3$$

d)

$$D \tan^2(3x) \quad \left| \begin{array}{l} 3x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$= D(\underbrace{\tan 3x}_{u(s(x))})^2 \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = \tan 3x \\ u(x) = x^2 \quad \text{och} \quad u'(x) = 2x \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{2 \tan 3x}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{D \tan 3x}_{s'(x)} \quad \left| \begin{array}{l} s_1(x) = 3x \quad \text{och} \quad s_1'(x) = 3 \\ u_1(x) = \tan x \quad \text{och} \quad u_1'(x) = 1 + \tan^2 x \end{array} \right.$$

$$= 2 \tan 3x \underbrace{(1 + \tan^2 3x)}_{u_1'(s_1(x))} \cdot \underbrace{3}_{s_1'(x)}$$

$$= 6 \tan 3x (1 + \tan^2 3x), \quad x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Alternativ 2

$$D \tan^2(3x) \quad \left| \begin{array}{l} 3x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$= D(\underbrace{\tan 3x}_{u(s(x))})^2 \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = \tan 3x \\ u(x) = x^2 \quad \text{och} \quad u'(x) = 2x \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{2 \tan 3x}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{D \tan 3x}_{s'(x)} \quad \left| \begin{array}{l} s_1(x) = 3x \quad \text{och} \quad s_1'(x) = 3 \\ u_1(x) = \tan x \quad \text{och} \quad u_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right.$$

$$= 2 \tan 3x \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 3x}}_{u_1'(s(x))} \cdot \underbrace{3}_{s_1'(x)}$$

$$= \frac{6 \tan 3x}{\cos^2 3x}, \quad x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e)

$$D(\sin x \cos x) \quad \left| \begin{array}{l} \text{derivatan av en produkt:} \\ D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f \end{array} \right.$$

$$= (D \sin x) \cdot \cos x + (D \cos x) \cdot \sin x$$

$$= \cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x \quad \left| \begin{array}{l} \text{cosinus för dubbla vinkeln:} \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

$$= \cos 2x$$

Alternativ 2

$$D(\sin x \cos x)$$

$$= D\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2} D \underbrace{\sin 2x}_{u(s(x))}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\cos 2x}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{2}_{s'(x)}$$

$$= \cos 2x$$

sinus för dubbla vinkeln:

 $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, vilket ger

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

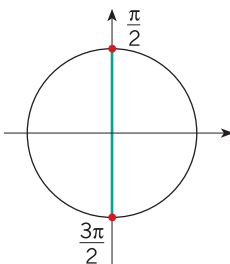
$$\left| \begin{array}{l} s(x) = 2x \quad \text{och} \quad s'(x) = 2 \\ u(x) = \sin x \quad \text{och} \quad u'(x) = \cos x \end{array} \right.$$

f)

$$D \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \neq 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$



derivatan av en kvot:

$$D \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{(Df) \cdot g - (Dg) \cdot f}{g^2}$$

$$= \frac{(D1) \cdot \cos x - (D \cos x) \cdot 1}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Svaret kan också ges på ett annat sätt:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

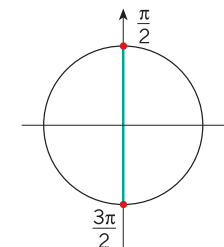
$$= \frac{\tan x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Alternativ 2

$$D \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \neq 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$



$$s(x) = \cos x \quad \text{och} \quad s'(x) = -\sin x$$

$$u(x) = x^{-1} \quad \text{och} \quad u'(x) = -x^{-2}$$

$$= D \underbrace{(\cos x)^{-1}}_{u(s(x))}$$

$$= \underbrace{-(\cos x)^{-2}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{s'(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(= \frac{\tan x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right)$$

Svar

a) $3\cos 3x$

b) $3\sin^2 x \cos x$

c) $3x^2 \cos x^3$

d) $6 \tan 3x (1 + \tan^2 3x), x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{6 \tan 3x}{\cos^2 3x}, x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \right)$$

e) $\cos 2x$

f) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

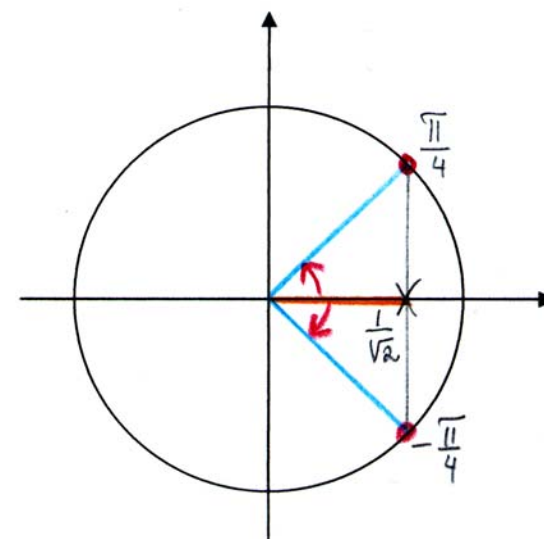
$$\left(\frac{\tan x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z} \right)$$

2**a)**

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ur minnestriangel eller
tabellbok:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

b)

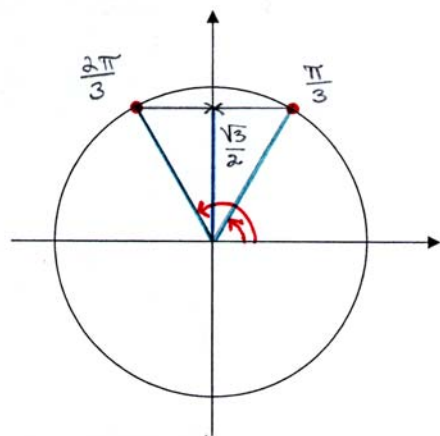
$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} = 0$$

$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ur minnestriangel eller
tabellbok:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \pi + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Anmärkning: Man skulle också ha kunnat lösa uppgiften genom

att beteckna $x - \frac{\pi}{3} = t$.

c)

$$\tan\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$5x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

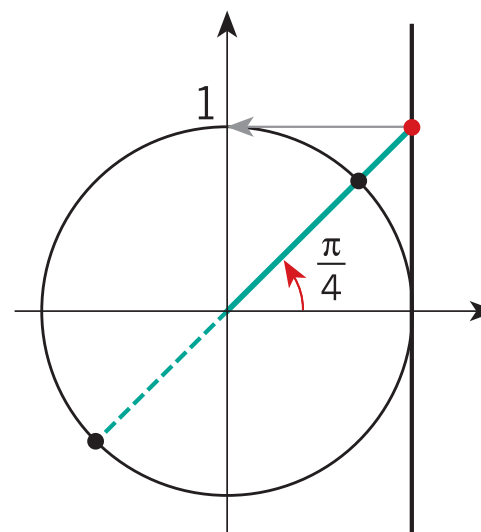
$$5x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$$

$$5x = \frac{4\pi}{6} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{2\pi}{15} + n \cdot \frac{\pi}{5}$$

ur tabellbok:

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$



$$5x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$5x = \overset{3)}{\frac{\pi}{4}} + \overset{2)}{\frac{\pi}{6}} + n \cdot \pi$$

$$5x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi \quad | :5$$

$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{5} \quad \left| \begin{array}{l} \text{uppfyller} \\ \text{definitions villkoret} \end{array} \right.$$

Svar

a) $x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ eller $x = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$

3

Vi studerar en aritmetisk talföljd $(a_n), n = 1, 2, 3, \dots$, vars 7:e term är $a_7 = -13$ och 15:nde term är $a_{15} = -11$.

Eftersom följderna är aritmetiska, så är

$$a_{15} = a_7 + (15 - 7) \cdot d$$

$$-11 = -13 + 8d$$

$$d = \frac{-11 + 13}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

a) $a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot d$

$$-13 = a_1 + 6 \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_1 = -13 - \frac{6}{4} = -14 \frac{1}{2}$$

b) Vi får olikheten

$$a_n < 0$$

$$a_1 + (n - 1) \cdot d < 0$$

$$-14 \frac{1}{2} + (n - 1) \cdot \frac{1}{4} < 0$$

$$(n-1) \cdot \frac{1}{4} < 14 \frac{1}{2} \quad | \cdot 4 (> 0)$$

$$n-1 < \frac{29}{2} \cdot 4$$

$$n < 58 + 1$$

$$n < 59 \quad | n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n \leq 58$$

Dvs. antalet negativa termer är 58 stycken.

($a_n < 0$, när $n = 1, 2, 3, \dots, 58$)

c) Vi får ekvationen

$$-14 \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = 21$$

$$(n-1) \cdot \frac{1}{4} = 21 + 14 \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{71}{2} \cdot 4 + 1 = 143 \in \mathbb{Z}_+$$

Dvs. 21 är följdens 143:e term.

Svar a) $a_1 = 14 \frac{1}{2}$

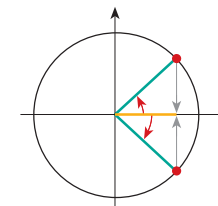
b) Antalet negativa termer är 58.

c) Ja, den 143:e term.

4

a)

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \quad \left| \begin{array}{l} \cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \\ \alpha = \pm \beta + n \cdot 2\pi \end{array} \right.$$



$$3x + \frac{\pi}{4} = \pm x + n \cdot 2\pi$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 3x + \frac{\pi}{4} = -x + n \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 4x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + n \cdot \pi \quad \text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Vi undersöker om vi kan skriva lösningarna i en enklare form.

n	$x = -\frac{\pi}{8} + n \cdot \pi$	$x = -\frac{\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}$
0	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{16}$
1	$-\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}$
2	$-\frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{15\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{16} + \pi = \frac{15\pi}{16}$
3	$-\frac{\pi}{8} + 3\pi = \frac{23\pi}{8} = 2\frac{7}{8}\pi$	$-\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} = \frac{23\pi}{16} = 1\frac{7}{16}\pi$
4		$-\frac{\pi}{16} + 2\pi = \frac{31\pi}{16} = 1\frac{15}{16}\pi$
5		$-\frac{\pi}{16} + \frac{5\pi}{2} = \frac{41\pi}{16} = 2\frac{9}{16}\pi$

Lösningarna kan inte skrivas i en enklare form.

Lösningarna kan också skrivas

$$x = \frac{7\pi}{8} + n \cdot \pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{7\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b)

$$3\sin^2 x + 16\cos x + 9 = 0$$

$$3(1 - \cos^2 x) + 16\cos x + 9 = 0$$

$$3 - 3\cos^2 x + 16\cos x + 9 = 0$$

$$-3\cos^2 x + 16\cos x + 12 = 0$$

$$\cos x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 12}}{2 \cdot (-3)}$$

$$\cos x = \frac{-16 \pm 20}{-6}$$

$$\cos x = \frac{-16 + 20}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{eller} \quad \cos x = \frac{-16 - 20}{-6} = \frac{-36}{-6} = 6 > 1$$

ingen lösning

Vi får ekvationen

$$\cos x = -\frac{2}{3}$$

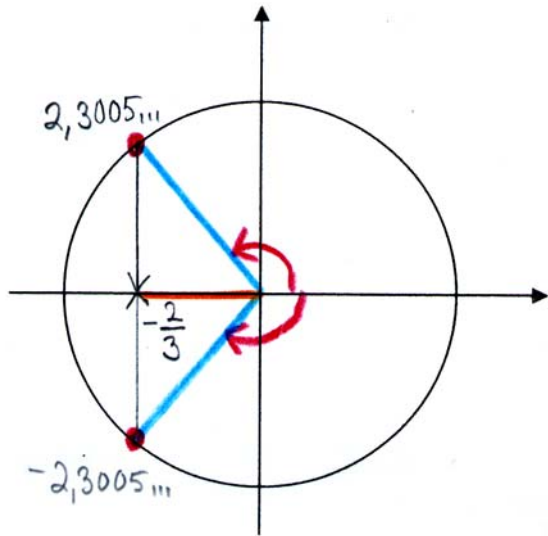
med räknare

$$\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = 2,3005\dots$$

trigonometrins

grundformel:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

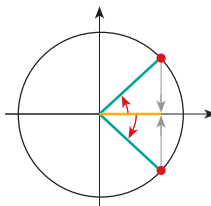


$$x = \pm 2,3005\dots + n \cdot 2\pi$$

$$x = \pm 2,30 + n \cdot 2\pi$$

c)

$$\cos x + \cos 4x = 0$$



$$\cos x = -\cos 4x$$

$$\cos x = \cos(\pi - 4x)$$

cosinus för
supplementvinkeln:

$$-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \pm \beta + n \cdot \pi$$

$$x = \pm(\pi - 4x) + n \cdot 2\pi$$

$$x = \pi - 4x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = -\pi + 4x + n \cdot 2\pi$$

$$5x = \pi + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad -3x = -\pi + n \cdot 2\pi$$

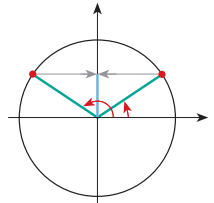
$$x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

d)

$$\sin 3x + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin 3x \quad \left| \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \right.$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(-3x) \quad \left| \begin{array}{l} \sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \\ \alpha = \beta + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \\ \alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi \end{array} \right.$$



$$x + \frac{\pi}{6} = -3x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x + \frac{\pi}{6} = \pi - (-3x) + n \cdot 2\pi$$

$$x + 3x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x - 3x = -\frac{\pi}{6} + \pi + n \cdot 2\pi$$

$$4x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad -2x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$

Svar

$$\text{a) } x = \frac{7\pi}{8} + n \cdot \pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{7\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x \approx \pm 2,30 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = -\frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

5

$$\text{a) i) } \sum_{i=0}^{100} (1-2i) = 1 + (-1) + (-3) + (-5) + \dots + (-199)$$

Summan är aritmetisk eftersom differensen av två på varandra följande termer är konstant,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= 1 - 2(k+1) - (1 - 2k) \\ &= 1 - 2k - 2 - 1 + 2k \\ &= -2, \end{aligned}$$

och därför oberoende av värdet på indexet $k = 0, 1, 2, \dots, 99$.

Vi får att

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{100} (1-2i) & \quad \left| \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \right. \\ &= 101 \cdot \frac{1 + (-199)}{2} \\ &= -9999 \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{k=0}^{19} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^0} + \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^{19}}$$

Summan är geometrisk eftersom kvoten av två på varandra följande termer är konstant,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2}{3^{k+1}}}{\frac{2}{3^k}} = \frac{2}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{2} = \frac{3^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3},$$

och därför oberoende av värdet på indexet $k = 0, 1, 2, \dots, 18$.

Vi får att

$$\sum_{k=0}^{19} \frac{2}{3^k} \quad \left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \\ a_1 = \frac{2}{3^0} = 2, \quad q = \frac{1}{3}, \quad n = 20 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right) \cdot \frac{3}{2} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right) = 3 - \frac{1}{3^{19}} \approx 3 \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \sum_{n=2}^{1999} \lg \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \lg \frac{4}{5} + \dots + \lg \frac{1999}{2000} \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av en kvot:} \\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \end{array} \right. \\ &= (\lg 2 - \cancel{\lg 3}) + (\cancel{\lg 3} - \cancel{\lg 4}) + (\cancel{\lg 4} - \cancel{\lg 5}) + \dots + (\cancel{\lg 1999} - \lg 2000) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lg 2 - \lg 2000 \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av en kvot:} \\ \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$= \lg \frac{2}{2000}$$

$$= \lg \frac{1}{1000}$$

$$= \lg \frac{1}{10^3}$$

$$= \lg 10^{-3}$$

$$= -3 \lg 10$$

$$= -3 \cdot 1$$

$$= -3$$

utflyttning av exponent:

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

logaritmen av basen:

$$\log_a a = 1$$

Alternativ 2

$$\sum_{n=2}^{1999} \lg \frac{n}{n+1}$$

$$= \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \lg \frac{4}{5} + \dots + \lg \frac{1999}{2000} \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av en produkt:} \\ \log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \end{array} \right.$$

$$= \lg \left(\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \dots \cdot \frac{1999}{2000} \right)$$

$$= \lg \frac{2}{2000}$$

$$= \lg \frac{1}{1000} \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av en kvot:} \\ \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \end{array} \right.$$

$$= \lg 1 - \lg 1000 \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av talet 1:} \\ \log_a 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$= 0 - \lg 10^3 \quad \left| \begin{array}{l} \text{utflyttning av exponent:} \\ \log_a x^r = r \log_a x \end{array} \right.$$

$$= -3 \cdot \lg 10 \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av basen:} \\ \log_a a = 1 \end{array} \right.$$

$$= -3 \cdot 1$$

$$= -3$$

Alternativ 3

$$\sum_{n=2}^{1999} \lg \frac{n}{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^{1999} [\lg n - \lg(n+1)]$$

$$= (\lg 2 - \cancel{\lg 3}) + (\cancel{\lg 3} - \cancel{\lg 4}) + (\cancel{\lg 4} - \cancel{\lg 5}) + \dots + (\cancel{\lg 1999} - \lg 2000)$$

$$= \lg 2 - \lg 2000$$

$$= \lg 2 - \lg(2 \cdot 1000) \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av en produkt:} \\ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \end{array} \right.$$

$$= \lg 2 - (\lg 2 + \lg 1000)$$

$$= \lg 2 - \lg 2 - \lg 1000$$

$$= -\lg 10^3 \quad \left| \begin{array}{l} \text{utflyttning av exponent:} \\ \log_a x^r = r \log_a x \end{array} \right.$$

$$= -3 \lg 10 \quad \left| \begin{array}{l} \text{logaritmen av basen:} \\ \log_a a = 1 \end{array} \right.$$

$$= -3 \cdot 1$$

$$= -3$$

logaritmen av en kvot:

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

logaritmen av en produkt:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

utflyttning av exponent:

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

logaritmen av basen:

$$\log_a a = 1$$

b) Talföljden $(a_n) = (-n^3 + 14n^2 + 111n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Vi undersöker funktionen $f(x) = -x^3 + 14x^2 + 111x$, vilket ger att

$$a_n = f(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Funktionen f är en kontinuerlig och deriverbar polynomfunktion. Vi gör ett teckenschema för funktionens derivata.

$$f'(x) = -3x^2 + 28x + 111$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

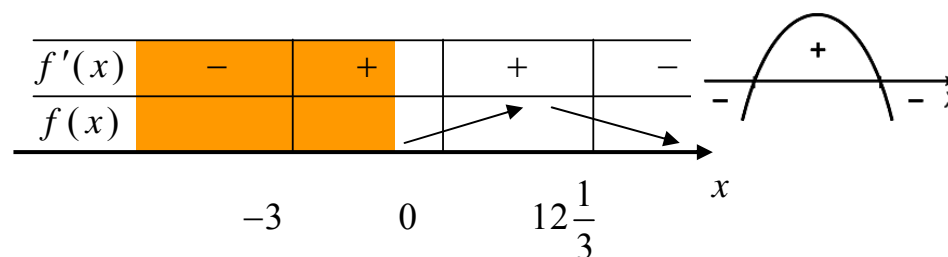
$$-3x^2 + 28x + 111 = 0$$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 111}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{2116}}{-6} = \frac{-28 \pm 46}{-6}$$

$$x = \frac{-28 + 46}{-6} = -3 \quad \text{eller} \quad x = \frac{-28 - 46}{-6} = 12\frac{1}{3}$$

Teckenschema:



Vi ser i teckenschemat att talföljden (a_n) är strängt växande när $n = 1, 2, 3, \dots, 12$ och strängt avtagande när $n = 13, 14, 15, \dots$

Dvs. största termen i talföljden (a_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, är antingen a_{12} eller a_{13} .

$$a_{12} = f(12) = -12^3 + 14 \cdot 12^2 + 111 \cdot 12 = 1620 \quad \text{största värde}$$

$$a_{13} = f(13) = -13^3 + 14 \cdot 13^2 + 111 \cdot 13 = 1612$$

Svar

a) i) - 9999

ii) $3 - \frac{1}{3^{19}} \approx 3$ iii) - 3

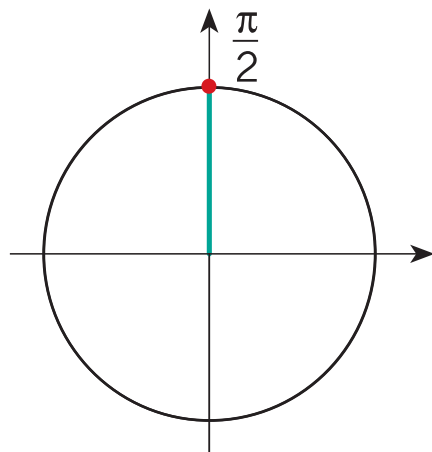
b) Den största termen är $a_{12} = 1620$

6**a)**

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2 \sin x \cos x = 1 \quad | 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\sin 2x = 1$$



$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

b)

$$\tan x = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$$

$$\sin x = \cos^2 x$$

$$\sin x = 1 - \sin^2 x$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$| \cdot \cos x (\neq 0)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

| Vi betecknar $t = \sin x$.

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1}$$

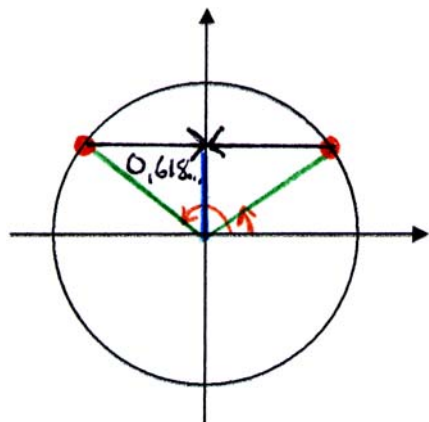
$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618... < -1 \quad \left| \begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1, \text{ vilket ger} \\ -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right.$$

duger inte

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618...$$

duger

$$\sin x = 0,618...$$



$$x = 0,6662... + n \cdot 2\pi$$

| uppfyller

definitionsvillkoret

eller

$$x = \pi - 0,6662... + n \cdot 2\pi$$

$$x = 2,4753... + n \cdot 2\pi$$

| uppfyller

definitionsvillkoret

Dvs.

$$x \approx 0,67 + n \cdot 2\pi \text{ eller } x \approx 2,48 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

c) Alternativ 1

$$4 \cos 4x = \cos^2 2x - 4$$

$$4 \cos(2 \cdot 2x) = \cos^2 2x - 4 \quad \left| \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \right.$$

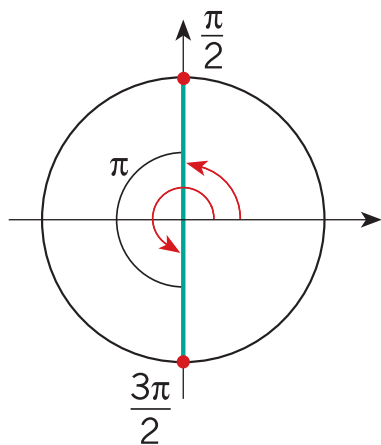
$$4(2\cos^2 2x - 1) = \cos^2 2x - 4$$

$$8\cos^2 2x - 4 = \cos^2 2x - 4$$

$$7\cos^2 2x = 0$$

$$\cos^2 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$



$$\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Alternativ 2

$$4 \cos 4x = \cos^2 2x - 4$$

$$4 \cos(2 \cdot 2x) = \cos^2 2x - 4 \quad \left| \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{array} \right.$$

$$4(1 - 2\sin^2 2x) = 1 - \sin^2 2x - 4$$

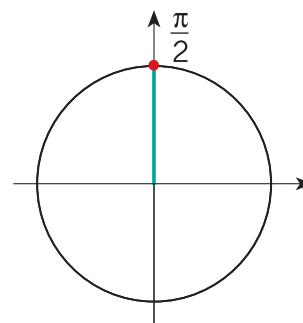
$$4 - 8\sin^2 2x + \sin^2 2x + 3 = 0$$

$$-7\sin^2 2x + 7 = 0$$

$$\sin^2 2x = 1$$

$$\sin 2x = \pm 1$$

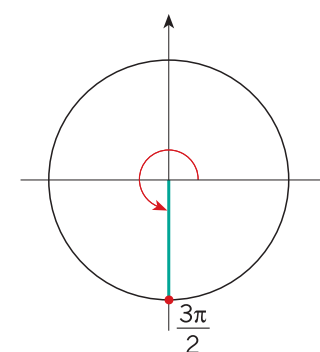
$$\sin 2x = 1$$



$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

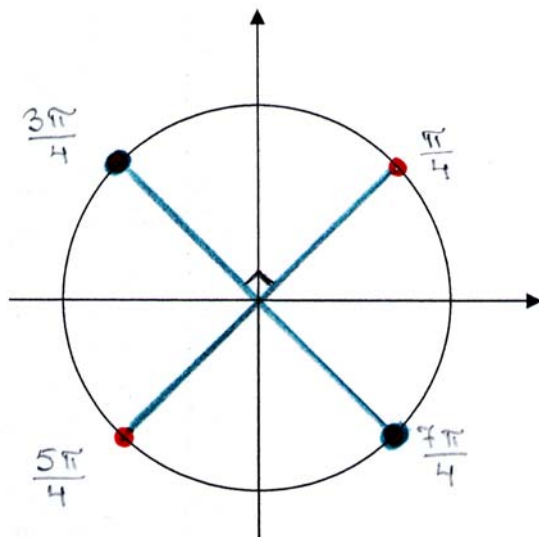
$$\sin 2x = -1$$



$$2x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Vi placerar periferipunkterna för de erhållna vinklarna på enhetscirkeln och undersöker om lösningarna till ekvationen kan skrivas enklare.



$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Svar

a) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

b) $x \approx 0,67 + n \cdot 2\pi$ eller $x \approx 2,48 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

7

a) $2 \sin x = 6 \cos x$

$$\sin x = 3 \cos x$$

Trigonometrins grundformel ger

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | \sin x = 3 \cos x$$

$$(3 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$9 \cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$10 \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{10}$$

Enligt formeln för sinus för dubbla vinkeln är

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad | \sin x = 3 \cos x$$

$$= 2 \cdot 3 \cos x \cdot \cos x$$

$$= 6 \cdot \cos^2 x$$

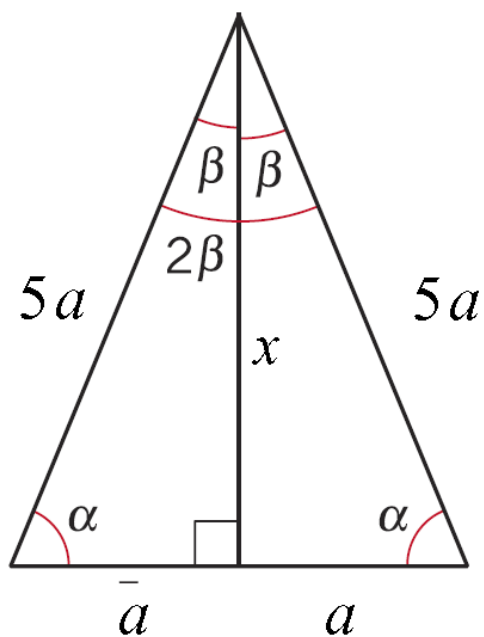
$$= 6 \cdot \frac{1}{10}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\left| \cos^2 x = \frac{1}{10} \right.$$

b) Anta att basvinkeln för den likbenta triangeln är α och att toppvinkeln är 2β . Eftersom $\cos \alpha = \frac{1}{5}$, så är halva basen i triangeln a och benen $5a$.

Vi ritar en figur.



Då är $\sin \beta = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5}$.

Alternativ 1

Enligt Pythagoras sats är

$$x^2 + a^2 = (5a)^2$$

$$x^2 + a^2 = 25a^2$$

$$x^2 = 24a^2$$

$$x = (\pm) \sqrt{24a^2} \quad | x > 0$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 6 \cdot a^2} \quad | \sqrt{a^2} = |a|$$

$$x = 2|a|\sqrt{6} \quad | a > 0$$

$$x = 2a\sqrt{6},$$

vilket ger $\cos \beta = \frac{x}{5a} = \frac{2a\sqrt{6}}{5a} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Definitionen för tangens och formlerna för sinus och cosinus för dubbla vinkeln ger nu

$$\tan 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta - 1}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}}{2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{6}}{25}}{2 \cdot \frac{4 \cdot 6}{25} - 1} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{25}}{\frac{23}{25}} = \frac{4\sqrt{6}}{25} \cdot \frac{25}{23}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{23} = 0,425998\dots \approx 0,43$$

Dvs. $\tan 2\beta = \frac{4\sqrt{6}}{23} \approx 0,43$

$$\left| \begin{array}{l} \sin\beta = \frac{1}{5} \\ \cos\beta = \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{array} \right.$$

Alternativ 2

Enligt tabellboken är

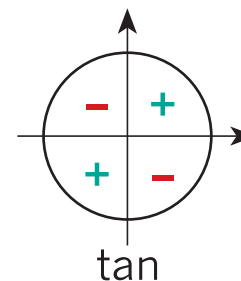
$$\tan\beta = \pm \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}} \quad \left| \sin\beta = \frac{1}{5} \right.$$

$$= \pm \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{24}{25}}}$$

$$= \pm \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{5}} = \pm \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \pm \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$= \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Eftersom $0 < \beta < 90^\circ$, så är $\tan\beta > 0$, vilket ger $\tan\beta = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.



Enligt tabellboken är

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} \quad \left| \quad \tan \beta = \frac{1}{2\sqrt{6}} \right.$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}}}{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{1 - \frac{1}{4 \cdot 6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{1 - \frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{23}{24}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{24}{23} = \frac{\sqrt{6}}{23} \cdot \frac{24}{\sqrt{6} \cdot 23}$$

$$= \frac{24 \cdot \sqrt{6}}{6 \cdot 23} = \frac{4\sqrt{6}}{23} \approx 0,43$$

Svar

a) $\sin 2x = \frac{3}{5}$

b) $\frac{4\sqrt{6}}{23} \approx 0,43$

8

- a) Punkten $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ ligger på kurvan $y = x^2 \cos x - 2 \sin x$ eftersom

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

Vi bestämmer tangentens riktningskoefficient med hjälp av derivatan.

$$y = x^2 \cos x - 2 \sin x$$

$$y' = 2x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot x^2 - 2 \cos x$$

$$= 2x \cos x - x^2 \sin x - 2 \cos x$$

Tangenten riktningskoefficient är

$$k_T = y' \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi \cdot 0 - \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 - 2 \cdot 0$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}$$

Normalens riktningskoefficient är då

$$k_N = -\frac{1}{k_T} = \frac{4}{\pi^2}$$

Tangentens ekvation är

$$y - y_0 = k_T (x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -2\right) \\ k_T = -\frac{\pi^2}{4} \end{array} \right.$$

$$y - (-2) = -\frac{\pi^2}{4} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y + 2 = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8}$$

$$y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8} - 2$$

Normalens ekvation är

$$y - y_0 = k_N (x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -2\right) \\ k_N = \frac{4}{\pi^2} \end{array} \right.$$

$$y - (-2) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y + 2 = \frac{4}{\pi^2}x - \frac{2}{\pi}$$

$$y = \frac{4}{\pi^2}x - \frac{2}{\pi} - 2$$

b) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$

Formeln för cosinus för dubbla vinkeln ger att

$$f(x) = 2 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Vi betecknar $t = \sin x$. Eftersom $x \in \mathbb{R}$, så gäller att $t \in [-1, 1]$.

Dvs. vi skall bestämma störst och minsta värde för funktionen

$$g(t) = 2t + 1 - 2t^2, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Alternativ 1

1) Funktionen g är kontinuerlig i det slutna intervallet $[-1, 1]$ och deriverbar i det öppna intervallet $] -1, 1 [$, vilket ger att g antar sitt största och minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen (Fermats sats).

2) Derivatans nollställen

$$g(t) = 2t + 1 - 2t^2$$

$$g'(t) = 2 - 4t$$

Vi får ekvationen

$$g'(t) = 0$$

$$2 - 4t = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$$

3) Funktionens värden i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen

$$g(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 - 2 \cdot (-1)^2 = -2 + 1 - 2 = -3 \quad \text{minsta värde}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \text{största värde}$$

$$g(1) = 2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 1^2 = 2 + 1 - 2 = 1$$

Svar Största värdet är $1\frac{1}{2}$ och minsta värdet är -3 .

Alternativ 2

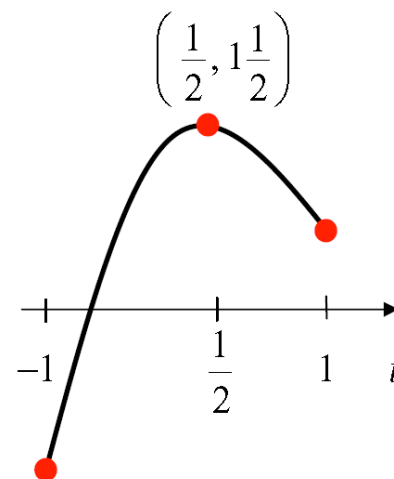
Grafen $y = 2t + 1 - 2t^2$, $-1 \leq t \leq 1$ till funktionen

$g(t) = 2t + 1 - 2t^2$, $-1 \leq t \leq 1$ är en parabel, som öppnar sig neråt.

Parabelns topp:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$$



Funktionen g 's

- största värde är $1\frac{1}{2}$ och
- minsta värde är $g(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 - 2 \cdot (-1)^2 = -3$.

Dvs. största värdet för funktionen f är $1\frac{1}{2}$ och minsta värdet är -3 .

Alternativ 3

Funktionen $f(x) = 2 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x$ är periodisk med perioden 2π , vilket gör att vi kan begränsa oss t.ex. till intervallet $[0, 2\pi]$.

1) Funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[0, 2\pi]$ och deriverbar i det öppna intervallet $]0, 2\pi[$, vilket ger att den antar sitt största värde och sitt minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen (Fermats sats).

2) Derivatans nollställen

$$f(x) = 2 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x - 2 \cdot 2 \sin x \cos x \\ &= 2 \cos x (1 - 2 \sin x) \end{aligned}$$

Vi får ekvationen

$$f'(x) = 0$$

$$2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

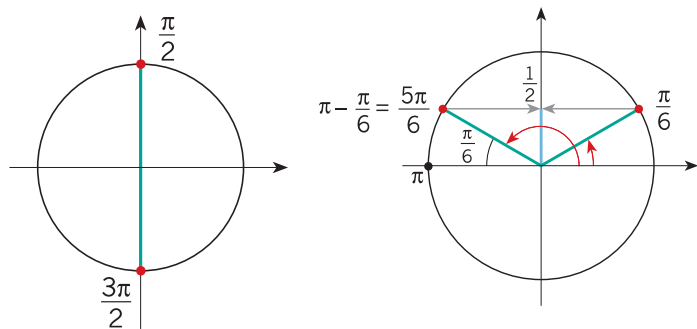
$$\cos x = 0 \quad \text{eller} \quad 1 - 2 \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

ur minnenstriangel

eller tabellbok:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Eftersom $0 < x < 2\pi$, så är derivatans nollställen

$$x = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6}$$

3) Funktionen värde i intervallets ändpunkter och i derivatans nollställen

$$f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$$

minsta värde

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\frac{1}{2}$$

största värde

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1\frac{1}{2}$$

största värde

$$f(2\pi) = 1$$

Dvs. funktionens största värde är $1\frac{1}{2}$ och minsta värde är -3 .

Svar a) Tangentens ekvation är $y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8} - 2$.

Normalens ekvation är $y = \frac{4}{\pi^2}x - \frac{2}{\pi} - 2$.

b) Det största värdet är $1\frac{1}{2}$ och det minsta värdet är -3 .

9

a) $f(x) = 2x^5 + 3 \tan \frac{x}{4}, \quad -2\pi < x < 2\pi$

Funktionen f är definierad när

$$\frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad | \cdot 4$$

$$x \neq 2\pi + n \cdot 2\pi$$

$$x \neq (n+1) \cdot 2\pi \quad \left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \\ -2\pi < x < 2\pi \end{array} \right.$$

alltid sann

Funktionen f är definierad, kontinuerlig och deriverbar för alla $x \in]-2\pi, 2\pi[$.

$$f'(x) = 10x^4 + 3 \cdot D\left(\tan \frac{x}{4}\right) \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = \frac{x}{4}, \quad u(x) = \tan x \\ s'(x) = \frac{1}{4}, \quad u'(x) = 1 + \tan^2 x \end{array} \right.$$

$$= 10x^4 + 3 \cdot \underbrace{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right)}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{s'(x)}$$

$$= 10x^4 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \tan^2 \frac{x}{4}$$

$$= \underbrace{10x^4}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4} \tan^2 \frac{x}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{> 0} > 0 \quad | -2\pi < x < 2\pi$$

Dvs. $f'(x) > 0$ för alla $-2\pi < x < 2\pi$, vilket ger att funktionen f är strängt växande. \square

- b) **Påstående:** $\sin x \leq x$, när $x \geq 0$, dvs.
 $\sin x - x \leq 0$, när $x \geq 0$.

Bevis:

Vi undersöker funktionen $f(x) = \sin x - x$, $x \geq 0$ och visar att den aldrig antar positiva värden.

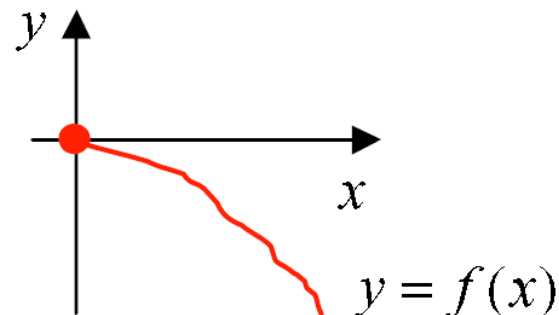
Vi undersöker förloppet för funktionen f med hjälp av derivatan.

$$f(x) = \sin x - x$$

$$f'(x) = \cos x - 1$$

Eftersom $\cos x \in [-1, 1]$ och $\cos x = 1$ endast i enstaka punkter, så är $f'(x) \leq 0$ alltid och $f'(x) = 0$ endast i enstaka punkter. Då är funktionen f strängt avtagande och antar sitt största värde när $x = 0$.

Eftersom $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$, så är $f(x) \leq 0$ för alla $x \geq 0$.



Dvs. olikheten $\sin x - x \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq x$ gäller för alla $x \geq 0$.

\square

10

a) Årsräntan är 6 %, vilket ger att månadsräntan är

$$\frac{6\%}{12} = 0,5\%$$

Antalet amorteringar är totalt $3 \cdot 12 = 36$ stycken.

Anta att den fasta summan (annuiteten) är m euro.

Då är

- skulden i euro efter den första amorteringen

$$v_1 = 1,005 \cdot 20\,000 - m$$

- skulden i euro efter den andra amortering

$$\begin{aligned} v_2 &= 1,005v_1 - m \\ &= 1,005(1,005 \cdot 20\,000 - m) - m \\ &= 1,005^2 \cdot 20\,000 - 1,005m - m \end{aligned}$$

- skulden i euro efter den tredje amorteringen

$$\begin{aligned} v_3 &= 1,005v_2 - m \\ &= 1,005(1,005^2 \cdot 20\,000 - 1,005m - m) - m \\ &= 1,005^3 \cdot 20\,000 - 1,005^2 m - 1,005m - m \end{aligned}$$

⋮

- skulden i euro efter den 36:e amorteringen

$$\begin{aligned} v_{36} &= 1,005v_{35} - m \\ &= 1,005^{36} \cdot 20\,000 - 1,005^{35}m - 1,005^{34}m - \dots - 1,005m - m \end{aligned}$$

Eftersom skulden är betald efter den 36:e amorteringen, så får vi ekvationen

$$v_{36} = 0$$

$$1,005^{36} \cdot 20\,000 - 1,005^{35}m - 1,005^{34}m - \dots - 1,005m - m = 0$$

$$1,005^{36} \cdot 20\,000 - m(1,005^{35} + 1,005^{34} + \dots + 1,005 + 1) = 0$$

$$1,005^{36} \cdot 20\,000 - m \underbrace{(1 + 1,005 + \dots + 1,005^{34} + 1,005^{35})}_{\text{geometrisk summa, där } a_1=1, q=1,005 \text{ och } n=36} = 0$$

$$1,005^{36} \cdot 20\,000 - m \cdot 1 \cdot \frac{1 - 1,005^{36}}{1 - 1,005} = 0$$

$$1,005^{36} \cdot 20\,000 = m \frac{1 - 1,005^{36}}{1 - 1,005}$$

$$m = \frac{1,005^{36} \cdot 20\,000}{\frac{1 - 1,005^{36}}{1 - 1,005}}$$

$$m = 608,438\dots$$

$$m \approx 608 \text{ (€)}$$

Den sammanlagda räntan är

$$36m - 20\,000 = 1903,794\dots \approx 1904 \text{ (€)}$$

Räntans andel av lånet är

$$\frac{1904}{20\,000} \cdot 100\% \approx 9,5\%$$

Alternativ 2

Enligt tabellboken är den fasta summan A (annuiteten)

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \begin{array}{l} K = 20\,000 \\ q = 1 + \frac{6}{100} = 1,005 \\ n = 36 \end{array} \right.$$

$$= 20\,000 \cdot 1,005^{36} \cdot \frac{1-1,005}{1-1,005^{36}}$$

$$= 608,4387\dots$$

$$\approx 608 \text{ (€)}$$

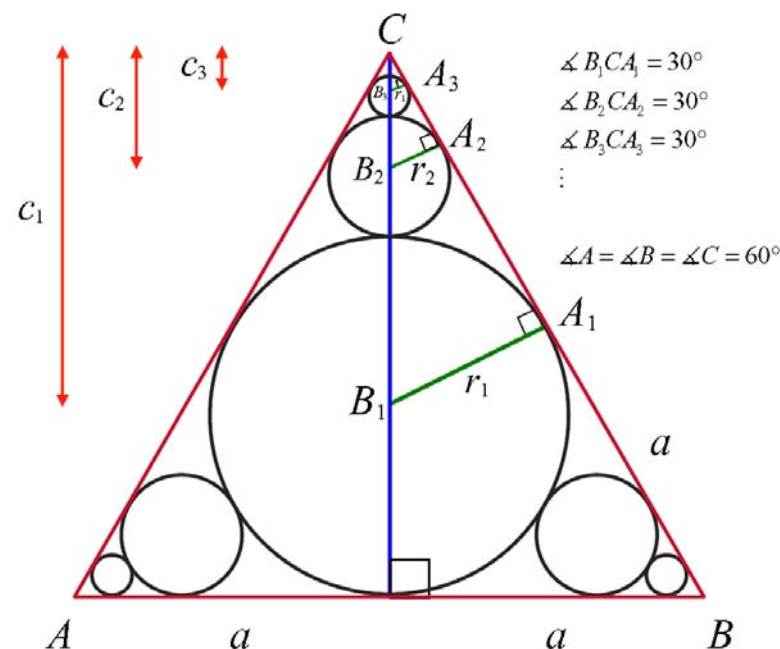
Sammanlagda räntan är

$$36m - 20\,000 = 1903,794\dots \approx 1904 \text{ (€)}$$

Räntornas andel av lånet är

$$\frac{1904}{20\,000} \cdot 100\% \approx 9,5\%$$

b) Vi bestämmer kvoten mellan radien hos två på varandra följande cirklar.



$$\Delta A_1B_1C \sim \Delta A_2B_2C \sim \Delta A_3B_3C \sim \dots \text{ (vv)}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{r_n}{c_n}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{c_n - r_n - r_{n+1}}{c_n}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r_n}{c_n}$$

$$c_n = 2r_n$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{2r_n - r_n - r_{n+1}}{2r_n}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{r_n - r_{n+1}}{2r_n}$$

$$2r_n r_{n+1} = r_n^2 - r_n r_{n+1}$$

$$3r_n r_{n+1} = r_n^2 \quad | : r_n (\neq 0)$$

$$3r_{n+1} = r_n$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Dvs. } r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n.$$

$A_{\text{cirkelarna}}$

$$= \pi r_1^2 + 3(\pi r_2^2 + \pi r_3^2 + \pi r_4^2 + \dots + \pi r_{33}^2)$$

$$= \pi r_1^2 + 3\pi \left[\left(\frac{1}{3} r_1\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 r_1\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 r_1\right)^2 + \dots + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{32} r_1\right)^2 \right]$$

$$= \pi r_1^2 + 3\pi r_1^2 \underbrace{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{64} \right]}_{\text{geometrisk summa}}$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2, q = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{och } n=32$$

$$= \pi r_1^2 + 3\pi r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{32}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \pi r_1^2 + 3\pi r_1^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{64}}\right)$$

$$= \pi r_1^2 \left[1 + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{3^{64}}\right) \right]$$

$$= \pi r_1^2 \left(\frac{11}{8} - \frac{1}{8 \cdot 3^{63}} \right)$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{8} \left(11 - \frac{1}{3^{63}} \right)$$

$$\begin{aligned}\Delta A_1 B_1 C: \quad \tan 30^\circ &= \frac{r_1}{a} \\ r_1 &= a \tan 30^\circ \\ r_1 &= \frac{a}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\text{Dvs. } A_{\text{cirkelarna}} = \frac{\pi a^2}{24} \left(11 - \frac{1}{3^{63}} \right)$$

Triangelns area:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ = 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \sqrt{3}$$

Vi får att

$$\begin{aligned}\frac{A_{\text{cirkelarna}}}{A_{\Delta}} \cdot 100\% &= \frac{\pi a^2 \cdot \left(11 - \frac{1}{3^{63}} \right)}{24} \cdot \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \cdot 100\% \\ &= \frac{25\pi}{6\sqrt{3}} \left(11 - \frac{1}{3^{63}} \right) \% \\ &= \frac{25\pi\sqrt{3}}{18} \left(11 - \frac{1}{3^{63}} \right) \% \\ &= 83,13247... \% \approx 83 \%\end{aligned}$$

Svar a) Den fasta summan är 608 €.

Den sammanlagda räntan är 1904 € (9,5 %).

$$\text{b) } \frac{25\pi\sqrt{3}}{18} \left(11 - \frac{1}{3^{63}} \right) \% \approx 83 \%$$

Prov 2**1**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{19\pi}{6} & \quad \left| \pi = 180^\circ \right. \\ &= \frac{19}{6} \cdot 180^\circ \\ &= 570^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{19\pi}{6} &= \sin \left(2\pi + \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= \sin \frac{7\pi}{6} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ur tabellbok:} \\ \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{19\pi}{6} &= \cos \left(2\pi + \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= \cos \frac{7\pi}{6} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ur tabellbok:} \\ \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \tan x = -\frac{2}{3} \quad \text{och} \quad 90^\circ < x < 180^\circ$$

Alternativ 1

$$\tan x = -\frac{2}{3} \quad \left| \text{definitionen av tangens} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} &= -\frac{2}{3} \\ \sin x &= -\frac{2}{3} \cos x \end{aligned}$$

Enligt trigonometrins grundformel får vi att

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \left| \sin x = -\frac{2}{3} \cos x \right.$$

$$\left(-\frac{2}{3} \cos x \right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{4}{9} \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \left| \cdot 9 \right.$$

$$4 \cos^2 x + 9 \cos^2 x = 9$$

$$13 \cos^2 x = 9$$

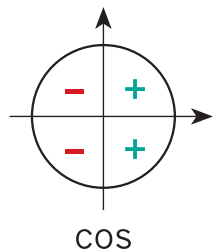
$$\cos^2 x = \frac{9}{13}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{9}{13}}$$

$$\cos x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Eftersom $90^\circ < x < 180^\circ$ så är $\cos x < 0$, vilket ger

$$\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$



Då är

$$\sin x = -\frac{2}{3} \cos x = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

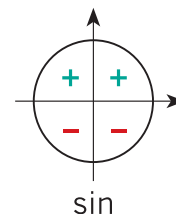
Alternativ 2

Enligt tabellboken är

$$\begin{aligned} \sin x &= \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \left| \tan x = -\frac{2}{3} \right. \\ &= \pm \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \pm \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \pm \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{13}{9}}} \end{aligned}$$

$$= \pm \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \mp \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \mp \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Eftersom $90^\circ < x < 180^\circ$ så är $\sin x > 0$, vilket ger $\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

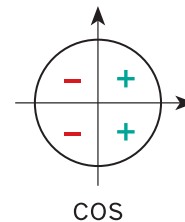


Enligt tabellboken är

$$\begin{aligned} \cos x &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \left| \tan x = -\frac{2}{3} \right. \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Eftersom $90^\circ < x < 180^\circ$, så är $\cos x < 0$, vilket ger

$$\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$



Svar a) 570° , $\sin \frac{19\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{19\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ och $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

2

a)

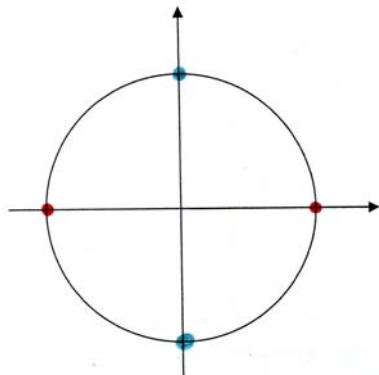
$$3\cos^2 x \cdot \sin x = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \quad \text{eller} \quad \sin x = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pi + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \text{eller} \quad x = n \cdot \pi$$

Vi placerar periferipunkterna för de erhållna vinklarna på enhetscirkeln och undersöker om lösningarna till ekvationen kan skrivas enklare.



$$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\tan x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \text{och} \quad \frac{\pi}{2} - 2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

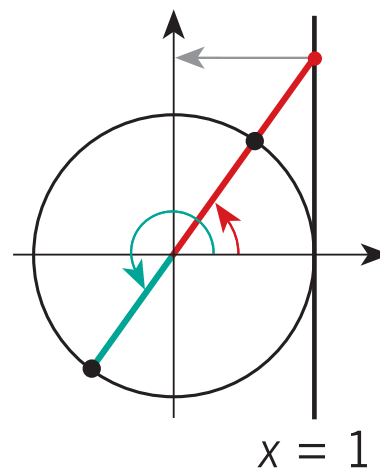
$$-2x \neq n \cdot \pi$$

$$x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Dvs. } x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad | \quad -\tan \alpha = \tan(-\alpha)$$

$$\tan x = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad | \quad \begin{array}{l} \tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \\ \alpha = \beta + n \cdot \pi \end{array}$$



$$x = 2x - \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$-x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad | \cdot (-1)$$

$$x = \frac{\pi}{2} - n \cdot \pi$$

Eftersom $n \in \mathbb{Z}$, så ger

$$x = \frac{\pi}{2} - n \cdot \pi \text{ och } x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

samma vinklar.

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

Uppfyller inte definitionsvillkoret

$$x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Dvs. ekvationen saknar lösning.

c) Vi skriver om ekvationen på formen $\tan \alpha = a$.

$$\cos x = \sqrt{3} \sin x$$

: $\cos x$, vilket kräver

$\cos x \neq 0$ dvs.

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

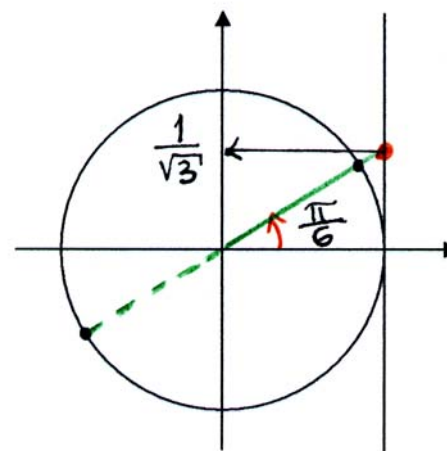
$$1 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sqrt{3} \tan x = 1$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ur tabellbok:

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$$

Om $\cos x = 0$ dvs. om $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, så är $\sin x \neq 0$. Då är

ekvationen $\underbrace{\cos x}_{=0} = \sqrt{3} \underbrace{\sin x}_{\neq 0}$ falsk. Dvs. ekvationen

$\cos x = \sqrt{3} \sin x$ är inte uppfylld när $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

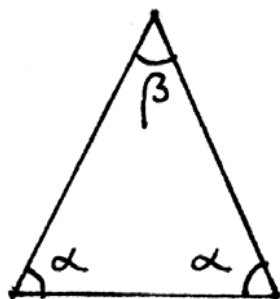
- Svar**
- a) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 - b) Ekvationen saknar lösning.
 - c) $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

3

Alternativ 1

Vi ritar en figur där α är basvinkeln i en likbent triangel och β toppvinkeln.

Anta att vinklarna är givna i radianer.



Vinkelsumman i triangeln är 180° eller π (rad), dvs.

$$2\alpha + \beta = \pi$$

$$\beta = \pi - 2\alpha \quad \left| \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ eftersom } \beta > 0. \right.$$

$$\tan \alpha = 2\sqrt{2} \quad \left| \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right.$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{2} \quad \left| \quad \cos \alpha \neq 0, \text{ eftersom } \alpha \neq \frac{\pi}{2}. \right.$$

$$\sin \alpha = 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\tan \beta = \tan(\pi - 2\alpha)$$

$$= \tan(-2\alpha + 1 \cdot \pi) \quad \left| \quad \tan(\alpha + n \cdot \pi) = \tan \alpha \right.$$

$$= \tan(-2\alpha) \quad \left| \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \right.$$

$$= -\tan 2\alpha \quad \left| \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right.$$

$$= -\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= -\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \left| \quad \sin \alpha = 2\sqrt{2} \cos \alpha \right.$$

$$= -\frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha}$$

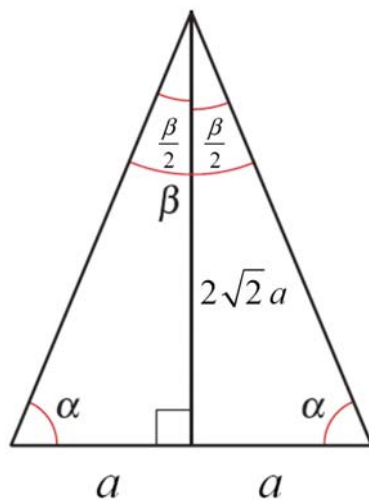
$$= \frac{-4\sqrt{2} \cos^2 \alpha}{-7\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Alternativ 2

Eftersom $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$, så är triangelns höjd $2\sqrt{2}a$ och halva basen a .

Vi ritar en figur.



$$\text{Då är } \tan \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Tabellboken ger att

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\left| \text{Insättning } x = \frac{\beta}{2} \right.$$

$$\tan \beta = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\left| \tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \right.$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{7}{8}}$$

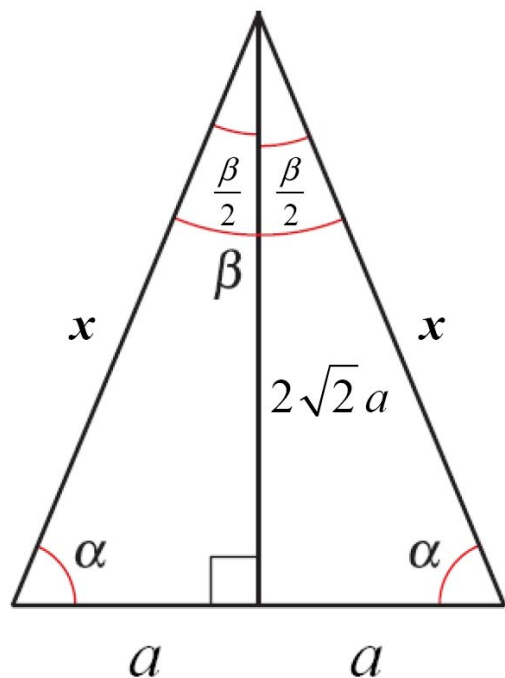
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{7} = \frac{8}{7\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{7 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Alternativ 3

Eftersom $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$, så är triangelns höjd $2\sqrt{2}a$ och halva basen a .

Vi ritar en figur.



Pythagoras sats ger att

$$x^2 = a^2 + (2\sqrt{2}a)^2$$

$$x^2 = a^2 + 8a^2$$

$$x^2 = 9a^2$$

$$x = (\pm) \sqrt{9a^2} \quad | \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{9a^2} \quad | \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$x = 3|a| \quad | \quad a > 0$$

$$x = 3a$$

Dvs.

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{a}{x} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}a}{x} = \frac{2\sqrt{2}a}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

vilket ger

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

definition av tangens

$$= \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right)}$$

sinus och cosinus för dubbla vinkeln:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Svar

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

4

$$\text{Antagande: } \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = 25a_{n-1} - 24, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Påstående: Allmänna termen är $a_n = 5^{2^{n-1}} + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Bevis:

- Talföljdens första term, $n = 1$:

$$5^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 5^1 + 1 = 6 = a_1$$

- Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} 25a_{n-1} - 24 &= 25 \cdot (5^{2^{(n-1)-1}} + 1) - 24 \\ &= 25 \cdot (5^{2^{n-2-1}} + 1) - 24 \\ &= 25 \cdot (5^{2^{n-3}} + 1) - 24 \\ &= 5^2 \cdot 5^{2^{n-3}} + 25 - 24 \\ &= 5^{2^{n-3+2}} + 1 \\ &= 5^{2^{n-1}} + 1 \\ &= a_n \end{aligned}$$

De båda villkoren för den rekursivt givna talföljden är uppfyllda, vilket ger att den allmänna termen är

$$a_n = 5^{2^{n-1}} + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \square$$

5

- a) Vi bestämmer skärningspunkten mellan kurvorna $y = \tan x$ och $y = \tan 2x$ genom att lösa ekvationssystemet

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} y = \tan x \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} y = \tan 2x \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \text{ dvs. } x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\tan x = \tan 2x \quad \left| \begin{array}{l} \tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \\ \alpha = \beta + n \cdot \pi \end{array} \right.$$

$$x = 2x + n \cdot \pi$$

$$-x = n \cdot \pi \quad \left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \\ \text{uppfyller} \\ \text{definitions villkoret} \end{array} \right.$$

$$x = n \cdot \pi$$

De vinklar $x = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$ som ligger i intervallet $]-2\pi, 2\pi[$ är vinklarna $x = -\pi$, $x = 0$ och $x = \pi$.

Vi bestämmer värdena för y genom att sätta in värdena för x i ekvation (1).

$$x = -\pi: \quad y = \tan(-\pi) = 0$$

$$x = 0: \quad y = \tan 0 = 0$$

$$x = \pi: \quad y = \tan \pi = 0$$

Dvs. skärningspunkterna är $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$ och $(\pi, 0)$.

- b) Den minsta positiva lösningen till ekvationen $e^{-x} = 2 \cos x$ dvs. till ekvationen $e^{-x} - 2 \cos x = 0$ är samma som det minsta positiva nollstället till funktionen

$$f(x) = e^{-x} - 2 \cos x.$$

Derivatans till funktionen f är

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) - 2 \cdot (-\sin x) = -e^{-x} + 2 \sin x$$

Derivatans till funktionens f' derivata är

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (-1) + 2 \cdot \cos x = e^{-x} + 2 \cos x$$

I intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ är $f''(x) > 0$, eftersom

$$e^{-x} > 0 \text{ och } \cos x \geq 0.$$

Då är derivatans till funktionen f' strängt växande i intervallet

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$y = f'(x)$$

Eftersom

- $f'(0) = -1 < 0$

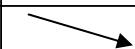
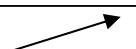
- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,8 > 0$

- f' är kontinuerlig i slutna intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- f' är strängt växande i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

så har derivatan exakt ett nollställe t i intervallet $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Teckenschema:

$f'(x)$	-	+
$f(x)$		
	0	$\frac{\pi}{2}$

x

Eftersom

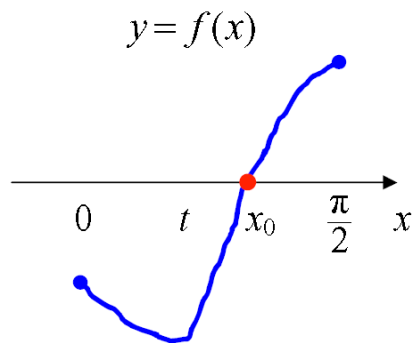
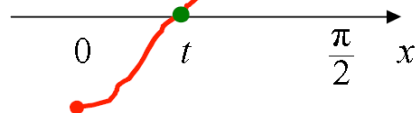
- $f(0) = -1 < 0$

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,2 > 0$

- f är kontinuerlig

så ger teckenschemat att funktionen f har exakt ett nollställe

x_0 i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Vi söker detta minsta positiva nollställe x_0 med hjälp av gaffelmetoden.

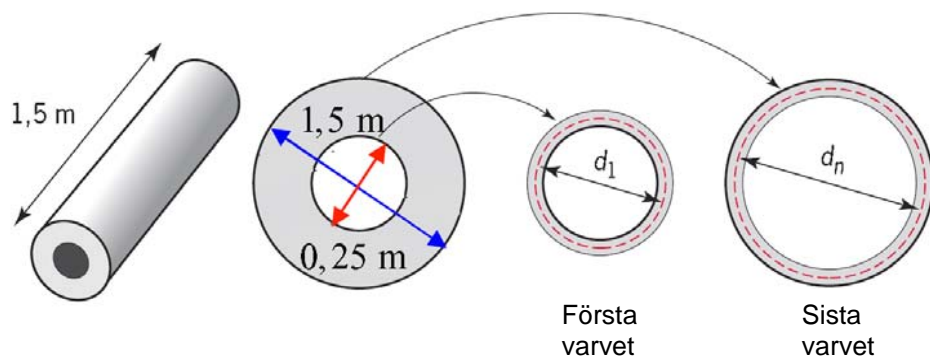
x	$f(x) = e^{-x} - 2\cos x$	f kontinuerlig i slutna intervallet	nollstället x_0 i öppna intervallet
0	$f(0) < 0$		
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad f(0) < 0$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$
1,5	$f(1,5) > 0, \quad f(0) < 0$	$[0; 1,5]$	$1 < x_0 < 1,5$
1,4	$f(1,4) < 0, \quad f(1,5) > 0$	$[1,4; 1,5]$	$1,4 < x_0 < 1,5$
1,45	$f(1,45) < 0, \quad f(1,5) > 0$	$[1,45; 1,5]$	$1,45 < x_0 < 1,5$
1,454	$f(1,454) > 0, \quad f(1,45) < 0$	$[1,45; 1,454]$	$1,45 < x_0 < 1,454$

Dvs. nollstället, givet med tre gällande siffror, är $x_0 \approx 1,45$.

Svar a) Skärningspunkterna är $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$ och $(\pi, 0)$.

b) $x \approx 1,45$

6.



Papprets tjocklek är $0,10 \text{ mm} = 0,010 \text{ cm}$.

Diametern i följande pappersvarv är alltid $2 \cdot 0,10 \text{ mm} = 0,20 \text{ mm}$ större än i föregående varv.

Varvens diametrar bildar då en aritmetisk serie.

Papprets längd är

$$\begin{aligned}
 p &= p_1 + p_2 + \dots + p_n & | & \quad p = 2\pi r = \pi d \\
 &= \pi d_1 + \pi d_2 + \dots + \pi d_n \\
 &= \pi \underbrace{(d_1 + d_2 + \dots + d_n)}_{\text{aritmetisk summa}} & | & \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\
 &= \pi \cdot n \cdot \frac{d_1 + d_n}{2}
 \end{aligned}$$

Diametern i det första pappersvarvet (mitt i pappret) är

$$d_1 = 0,25 \text{ m} + 0,10 \text{ mm} = 25,01 \text{ cm} \text{ och}$$

diametern i det sista pappersvarvet (mitt i pappret) är

$$d_n = 1,5 \text{ m} - 0,10 \text{ mm} = 149,99 \text{ cm}.$$

Antalet varv i rullen är

$$n = \frac{(1,5 \text{ m} - 0,25 \text{ m}) : 2}{0,10 \text{ mm}} = \frac{62,5 \text{ cm}}{0,010 \text{ cm}} = 6250$$

Papprets längd är

$$\begin{aligned}
 p &= \pi \cdot n \cdot \frac{d_1 + d_n}{2} \\
 &= \pi \cdot 6250 \cdot \frac{25,01 \text{ cm} + 149,99 \text{ cm}}{2} \\
 &= 17\,180,584\dots \text{ m} \\
 &\approx 17,2 \text{ km}
 \end{aligned}$$

Svar 17,2 km

7

Anta att den årliga insättningen är a euro och att antalet insättningar (antalet sparår) är n .

1:a insättningen är efter n år $1,025^n a$

2:a insättningen är efter $n-1$ år $1,025^{n-1} a$

3:e insättningen är efter $n-2$ år $1,025^{n-2} a$

⋮

n :te insättningen är efter 1 år $1,025a$

Saldot på kontot efter n år är

$$\underbrace{1,025a + 1,025^2 a + 1,025^3 a + \dots + 1,025^n a}_{\text{geometrisk summa}}$$

$a_1 = 1,025a$, $q = 1,025$ och antalet termer n

$$= 1,025a \cdot \frac{1 - 1,025^n}{1 - 1,025}$$

Vi får ekvationen

$$1,025a \cdot \frac{1 - 1,025^n}{1 - 1,025} = 20a \quad | :a (\neq 0)$$

$$1,025 \cdot \frac{1 - 1,025^n}{1 - 1,025} = 20 \quad | \cdot (-0,025) \quad | : 1,025$$

$$1 - 1,025^n = \frac{-0,5}{1,025}$$

$$\underbrace{1,025^n}_{>0} = 1 + \underbrace{\frac{0,5}{1,025}}_{>0}$$

Funktionen \lg är *strängt växande*,
likheten bevaras.

$$\lg 1,025^n = \lg \left(1 + \frac{0,5}{1,025} \right)$$

logaritmen av en potens:

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$n \lg 1,025 = \lg \left(1 + \frac{0,5}{1,025} \right)$$

$$n = \frac{\lg \left(1 + \frac{0,5}{1,025} \right)}{\lg 1,025}$$

$$n = 16,089\dots$$

$$n \approx 17$$

Svar 17 år

8

$$f(x) = 4x - 3 \tan x + 7$$

Funktionen f är definierad när $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vi gör ett teckenschema för derivatan av funktionen f .

$$f'(x) = 4 - 3 \cdot D \tan x + 0 \quad \left| \quad D \tan \alpha = 1 + \tan^2 \alpha \right.$$

$$= 4 - 3(1 + \tan^2 x)$$

$$= 1 - 3 \tan^2 x$$

Derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0$$

$$1 - 3 \tan^2 x = 0$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{eller} \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ur tabellbok

$$\tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

duger

Derivatan f' är kontinuerlig, vilket ger att den endast kan byta tecken i derivatans nollställen eller i punkterna

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Vi bestämmer derivatans tecken med hjälp av några testpunkter.

x	$f'(x)$
$0,5 + n \cdot \pi$	+
$1 + n \cdot \pi$	-
$2 + n \cdot \pi$	-
$3 + n \cdot \pi$	+

$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
	$\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$	$\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$\frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi$	x

Teckenschemat ger att funktionen har

$$\text{maximiställen } x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

och

$$\text{minimiställen } x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Svar maximiställen $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$ och

$$\text{minimiställen } x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

9

Anta att sidlängden i den första kvadraten är a .

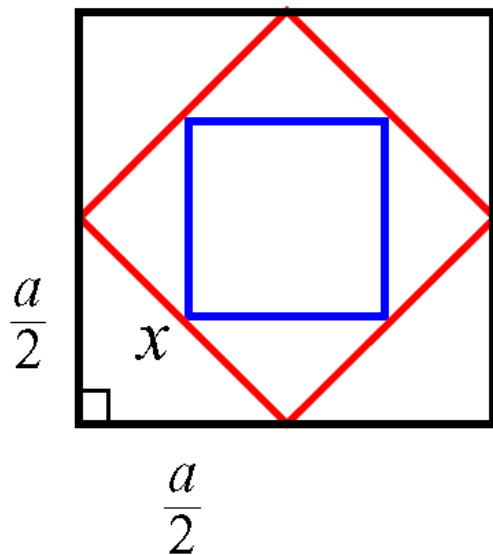
Vi bestämmer sidlängden x i den andra kvadraten med hjälp av Pythagoras sats.

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$x = (\pm) \frac{a}{\sqrt{2}}$$



Dvs. sidlängden i följande kvadrat är alltid $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gånger
sidlängden i föregående kvadrat.

a) Summan av den 50 första kvadraternas omkretsar är

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{50}$$

$$= 4a + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}a + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 a + \dots + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{49} a$$

geometrisk summa

$$a_1 = 4a, q = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ och } n = 50$$

$$= 4a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{50}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 4a \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{25}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}$$

$$= 4a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{25}}\right)$$

$$= 4a \frac{2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} \left(1 - \frac{1}{2^{25}}\right) = 4a(2 + \sqrt{2}) \left(1 - \frac{1}{2^{25}}\right)$$

$$\approx 13,7a$$

b) Summan av de 50 första kvadraternas areor är

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{50}$$

$$= a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 a\right]^2 + \dots + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{49} a\right]^2$$

$$= a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 a^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{98} a^2$$

geometrisk summa

$$a_1 = a^2, q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ och } n = 50$$

$$= a^2 \cdot \frac{1 - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = a^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{50}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

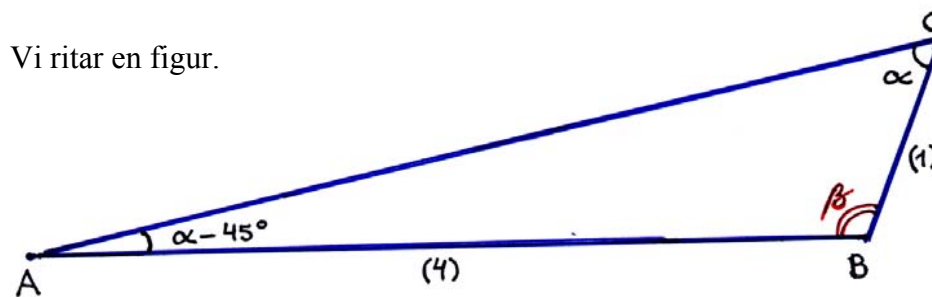
$$= 2a^2 \left(1 - \frac{1}{2^{50}}\right) \approx 2a^2$$

Svar a) $4a(2 + \sqrt{2}) \left(1 - \frac{1}{2^{25}}\right) \approx 13,7a$

b) $2a^2 \left(1 - \frac{1}{2^{50}}\right) \approx 2a^2$

10

Vi ritar en figur.



Vi betecknar sidan $BC = a$, vilket ger att sidan $AB = 4a$.

Sinussatsen ger förhållandet

$$\frac{4a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha - 45^\circ)}$$

$$\frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\sin \alpha} = \frac{a}{4a}$$

$$4\sin(\alpha - 45^\circ) = \sin \alpha$$

$$4(\sin \alpha \cos 45^\circ - \cos \alpha \sin 45^\circ) = \sin \alpha$$

sinussatsen:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

ur tabellbok:

$$\sin(x - y)$$

$$= \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

ur minnestriangel eller tabellbok:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4\left(\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\alpha$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\alpha - \frac{4}{\sqrt{2}}\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - 1\right)\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}}\cos\alpha \quad \left| \begin{array}{l} : \cos\alpha, \text{ vilket kräver} \\ \cos\alpha \neq 0 \text{ dvs.} \\ \alpha \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - 1\right)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\tan\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \left| \cdot \sqrt{2} \right.$$

$$(4 - \sqrt{2})\tan\alpha = 4 \quad \left| : (4 - \sqrt{2}) \right.$$

$$\tan\alpha = \frac{4}{4 - \sqrt{2}}$$

$$\alpha = 57,11948\dots^\circ$$

med räknare:

$$\tan^{-1}\left(\frac{4}{4 - \sqrt{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1} 1,546918\dots$$

$$= 57,11948\dots^\circ$$

uppfyller villkoret

$$\alpha \neq 90^\circ$$

Vinkelsumman i en triangel är 180° , vilket gör att vi kan bestämma den tredje vinkeln β ur ekvationen

$$\alpha - 45^\circ + \beta + \alpha = 180^\circ$$

$$\beta = 225^\circ - 2\alpha \quad \left| \alpha = 57,11948\dots^\circ \right.$$

$$\beta = 110,76102\dots^\circ$$

$$\beta \approx 110,8^\circ$$

Svar Den tredje vinkeln i triangeln är $110,8^\circ$.

Prov 3**1**

När ringen rullar ett varv förflyttar den sig en sträcka som är samma som ringens omkrets och punkten P vrider sig vinkeln 2π kring ringens medelpunkt.

När ringen rör sig 10 m är motsvarande vridningsvinkel

$$\alpha = \frac{\text{bågen}}{\text{radien}} = \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ cm}} = \frac{1000 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 50 \text{ (rad)}$$

$$\pi = 180^\circ$$

$$1 \text{ (rad)} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\begin{aligned} 50 \text{ (rad)} &= 50 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 2864,78\dots^\circ \\ &\approx 2865^\circ \end{aligned}$$

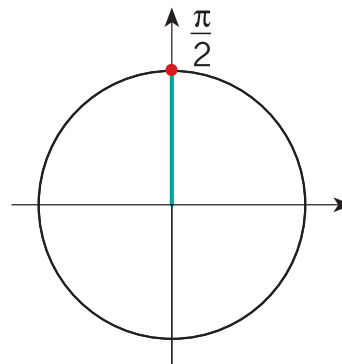
Svar 2 865°

2

a) Vi får ekvationen

$$\sin(-4x) - 1 = 0$$

$$\sin(-4x) = 1$$



$$-4x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

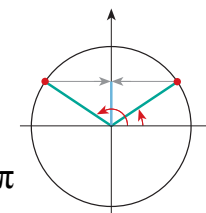
b) Vi får ekvationen

$$\sin 3x = \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi$$



$$3x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 3x = \pi - \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

c)

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0, \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\cos x = \frac{3 \pm 5}{4}$$

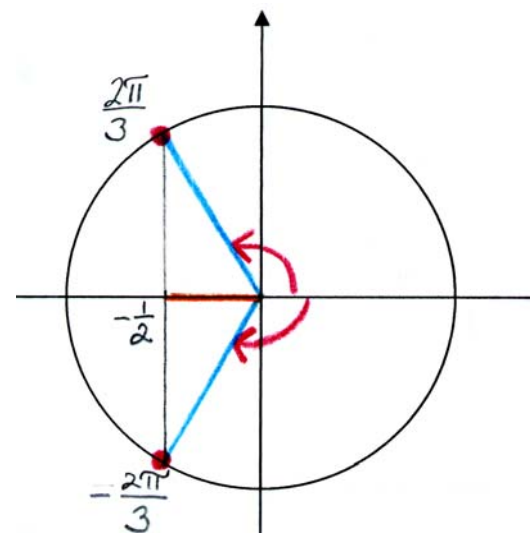
$$\cos x = \frac{8}{4} = 2 > 1 \quad \text{eller} \quad \cos x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

saknar lösning

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

ur tabellboken:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

n	$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$	$0 < x < 2\pi$
0	$\frac{2\pi}{3}$	duger
1	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = 2\frac{2}{3}\pi$	duger inte
\vdots	\vdots	\vdots
-1	$\frac{2\pi}{3} - 2\pi < 0$	duger inte
\vdots	\vdots	\vdots

n	$x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$	$0 < x < 2\pi$
0	$-\frac{2\pi}{3}$	duger inte
1	$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$	duger
2	$-\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi$	duger inte
\vdots	\vdots	\vdots
-1	$-\frac{2\pi}{3} - 2\pi < 0$	duger inte
\vdots	\vdots	\vdots

Svar

a) Nollställena är $x = -\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ eller $x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

c) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$. I intervallet $0 < x < 2\pi$ ligger

lösningarna $\frac{2\pi}{3}$ och $\frac{4\pi}{3}$

3

a) $\sin x = \frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Trigonometrins grundformel ger

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

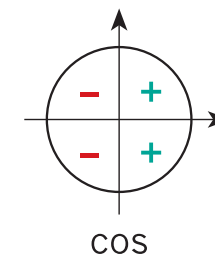
$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \left| \sin x = \frac{7}{25} \right.$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \frac{49}{625}}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{576}{625}}$$

$$\cos x = \pm \frac{24}{25}$$



Eftersom $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ så är $\cos x < 0$, vilket ger $\cos x = -\frac{24}{25}$.

Då är

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{7}{25} \cdot \frac{25}{24} = -\frac{7}{24}$$

Alternativ 2

$$\sin x = \frac{7}{25}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

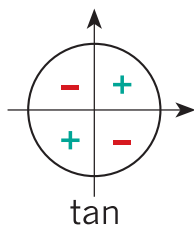
Enligt tabellboken är

$$\tan x = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \left| \sin x = \frac{7}{25} \right.$$

$$= \pm \frac{\frac{7}{25}}{\sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{7}{25}}{\sqrt{\frac{576}{625}}}$$

$$= \pm \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \pm \frac{7}{25} \cdot \frac{25}{24}$$

$$= \pm \frac{7}{24}$$



Eftersom $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ så är $\tan x < 0$, vilket ger $\tan x = -\frac{7}{24}$.

b) $\tan x = 2$

definitionen av tangens:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2$$

$$\sin x = 2 \cos x$$

Enligt trigonometrins grundformel är

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \left| \sin x = 2 \cos x \right.$$

$$(2 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$5 \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Då är } \sin x = 2 \cos x = 2 \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Dvs. antingen

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{och} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{eller}$$

$$\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{och} \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vi får att

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

ur tabellbok:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \\ = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

sinus för dubbla vinkeln:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

cosinus för dubbla vinkeln:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

ur minnestriangel eller

tabellbok:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (2 \cos^2 x - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{5} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} - 3}{10} \approx 0,39$$

anmärkning:

övre och nedre tecknen

motsvarar varandra

Alternativ 2

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

ur tabellbok:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \\ = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

sinus för dubbla vinkeln:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

cosinus för dubbla vinkeln:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

ur minnestriangel eller

tabellbok:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (2 \cos^2 x - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

ur tabellbok:

$$\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

Anmärkning:

$$\text{Eftersom } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2 > 0,$$

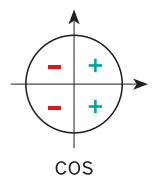
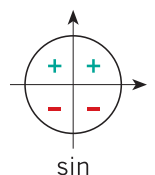
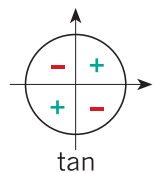
så har $\sin x$ och $\cos x$

samma tecken,

dvs. övre och nedre

tecknen i formlerna

motsvarar varandra.



$$= \sqrt{3} \left(\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \right) + \frac{1}{2} \left[2 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1 \right) \quad | \tan x = 2$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2}{1 + 2^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1 + 2^2} - 1 \right)$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)$$

$$= \overset{2)}{2\sqrt{3}} \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} - 3}{10} \approx 0,39$$

Svar

a) $-\frac{7}{24}$

b) $\frac{4\sqrt{3} - 3}{10} \approx 0,39$

4

Talföljden $(a_n) = (500, 497, \dots)$ är geometrisk, vilket ger

$$q = \frac{497}{500} \text{ och}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 500 \cdot \left(\frac{497}{500}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi får olikheten

$$a_n > 1$$

$$500 \cdot \left(\frac{497}{500}\right)^{n-1} > 1 \quad | :500$$

$$\underbrace{\left(\frac{497}{500}\right)^{n-1}}_{>0} > \underbrace{\frac{1}{500}}_{>0}$$

$$\ln\left(\frac{497}{500}\right)^{n-1} > \ln\frac{1}{500} \quad | \log a^r = r \log a$$

$$(n-1)\ln\left(\frac{497}{500}\right) > \ln\frac{1}{500} \quad | : \ln\left(\frac{497}{500}\right) (< 0)$$

$$n-1 < \frac{\ln\frac{1}{500}}{\ln\left(\frac{497}{500}\right)}$$

$$n < \frac{\ln\frac{1}{500}}{\ln\left(\frac{497}{500}\right)} + 1$$

$$n < 1033,7$$

$$n \leq 1033$$

Dvs. 1033 termer är större än ett.

$(a_n < 1, \text{ när } n = 1, 2, 3, \dots, 1033)$

Svar 1033 st.

5

$$f(x) = \frac{e^x}{\cos x} \quad \left| \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \right.$$

$$f'(x) = D \frac{e^x}{\cos x} \quad \left| \quad D \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{(Df) \cdot g - (Dg) \cdot f}{g^2} \right.$$

$$= \frac{e^x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot e^x}{(\cos x)^2} = \frac{e^x \cdot (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

Då är

$$f' \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \sin \frac{\pi}{4} \right]}{\cos^2 \left(-\frac{\pi}{4} \right)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{cosinus för motsatta vinklar:} \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right.$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi}{4}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ur minnestriangel eller} \\ \text{tabellbok:} \\ \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 0 \quad \square$$

6

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 2x$$

$$\left(\cos^2 x \right)^2 - \left(\sin^2 x \right)^2 = \sin 2x \quad \left| \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \right.$$

$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x \right) \left(\cos^2 x - \sin^2 x \right) = \sin 2x \quad \left| \begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array} \right.$$

$$1 \cdot \cos 2x = \sin 2x$$

: cos 2x, vilket
kräver
cos 2x ≠ 0, dvs.

$$\sin 2x = \cos 2x$$

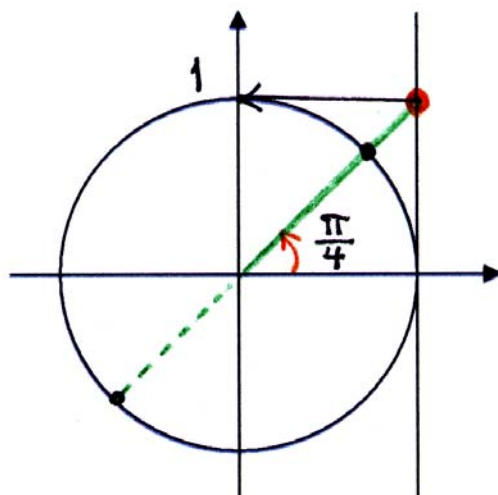
$$2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$$

$$\tan 2x = 1$$

ur tabellbok:
tan $\frac{\pi}{4} = 1$



$$2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{uppfyller} \\ \text{definitions-} \\ \text{villkoret} \end{array} \right.$$

Om $\cos 2x = 0$ så är $\sin 2x \neq 0$. Då är ekvationen

$$\underbrace{\cos 2x}_{=0} = \underbrace{\sin 2x}_{\neq 0} \text{ falsk.}$$

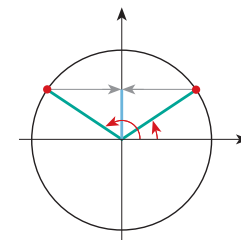
Alternativa lösningsätt:

Vi kan lösa ekvationen $\sin 2x = \cos 2x$ också på andra sätt:

1) Vi skriver om ekvationen på formen $\sin \alpha = \sin \beta$.

$$\sin 2x = \cos 2x \quad \left| \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right.$$

$$\sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \quad \left| \begin{array}{l} \sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \\ \alpha = \beta + n \cdot 2\pi \text{ eller} \\ \alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi \end{array} \right.$$



$$2x = \frac{\pi}{2} - 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + n \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + n \cdot 2\pi$$

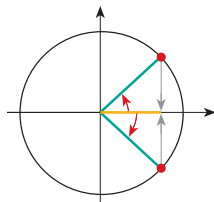
$$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{eller} \quad 0 = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

ingen lösning

2) Vi skriver om ekvationen på formen $\cos \alpha = \cos \beta$.

$$\sin 2x = \cos 2x \quad \left| \quad \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right.$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \cos 2x \quad \left| \quad \begin{array}{l} \cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \\ \alpha = \pm \beta + n \cdot 2\pi \end{array} \right.$$



$$\frac{\pi}{2} - 2x = -2x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad \frac{\pi}{2} - 2x = 2x + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad -4x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

saknar lösning

$$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Svar $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

7

Vi tänker oss höjden hos den övre kanten på tegellagren som en aritmetisk talföljd, i enheten centimeter.

$$a_1 = 9,0$$

$$a_6 = 49,0$$

Vi bestämmer termen a_{25} .

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d$$

$$49,0 = 9,0 + 5d$$

$$d = \frac{49,0 - 9,0}{5}$$

$$d = 8,0$$

$$a_{25} = a_1 + (25-1) \cdot d$$

$$= 9,0 + 24 \cdot 8,0$$

$$= 201,0$$

Dvs. spisens höjd är 201,0 cm.

Svar 201,0 cm

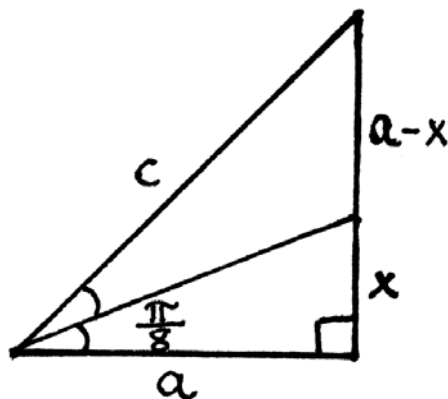
8

De spetsiga vinklarna i en likbent rätvinklig triangel är

45° eller $\frac{\pi}{4}$ radianer.

Bisektrisen delar dessa vinklar i två vinklar som är $\frac{\pi}{8}$ radianer.

Vi ritar en figur och betecknar kateterna med bokstaven a och hypotenusan med bokstaven c . Bisektrisen delar den motsatta kateten i delarna x och $a - x$.



Vi bestämmer hypotenusan med Pythagoras sats.

$$a^2 + a^2 = c^2$$

$$c^2 = 2a^2$$

$$c = (\pm)\sqrt{2}a \quad | c > 0$$

Bisektrisen delar den motsatta sidan i de närliggande sidornas förhållande (bisektrissatsen).

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{c} \quad | c = \sqrt{2}a$$

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{\sqrt{2}a}$$

$$\frac{x}{a-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}x = a - x$$

$$\sqrt{2}x + x = a$$

$$(\sqrt{2} + 1)x = a \quad | :(\sqrt{2} + 1)$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1}$$

Dvs.

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{8} &= \frac{x}{a} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2} + 1}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Svar $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

9

a) Summan av den n första termerna i den geometriska talföljden $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots\right)$ är

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{4} \\ q = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

Vi löser olikheten

$$\left| S_n - \frac{1}{3} \right| < 0,000\,001$$

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} - \frac{1}{3} \right| < 0,000\,001$$

$$\left| -\frac{1}{3 \cdot 4^n} \right| < \frac{1}{1\,000\,000} \quad \left| |a| = -a, \text{ när } a < 0. \right.$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{1}{1\,000\,000} \quad \left| \cdot 1\,000\,000 \cdot 4^n (> 0) \right.$$

$$\frac{1\,000\,000}{3} < 4^n$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{>0} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{>0}$

Funktionen \lg on *strängt växande*, storleksordningen bevaras.

$$\lg \frac{1\,000\,000}{3} < \lg 4^n$$

logaritmen av en potens:

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$\lg \frac{1\,000\,000}{3} < n \lg 4$$

$:\lg 4 (> 0)$

$$\frac{\lg \frac{1\,000\,000}{3}}{\lg 4} < n$$

$$n > 9,17\dots \quad \left| n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$n = 10, 11, 12, \dots$$

Dvs. åtminstone 10

b)

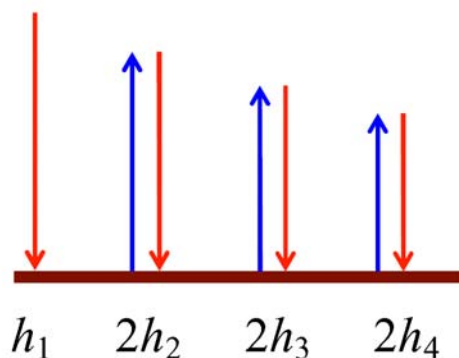
$$h_1 = 4,0 \text{ m}$$

$$h_2 = 0,85h_1 = 0,85 \cdot 4,0 \text{ m}$$

$$h_3 = 0,85h_2 = 0,85^2 \cdot 4,0 \text{ m}$$

⋮

$$h_n = 0,85^n \cdot 4,0 \text{ m}$$



Den sträcka som bollen rör sig före den hundra studsens är

$$h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 + \dots + 2h_{100}$$

$$= h_1 + 2(h_2 + h_3 + h_4 + \dots + h_{100})$$

$$= 4,0 \text{ m} + 2 \cdot \underbrace{(0,85 \cdot 4,0 \text{ m} + 0,85^2 \cdot 4,0 \text{ m} + \dots + 0,85^{99} \cdot 4,0 \text{ m})}_{\text{geometrisk summa}}$$

$$a_1 = 0,85 \cdot 4,0 \text{ m}; q = 0,85 \text{ och } n = 99$$

$$= 4,0 \text{ m} + 2 \cdot 0,85 \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \frac{1 - 0,85^{99}}{1 - 0,85}$$

$$= 49,333\dots \text{ m}$$

$$\approx 49,3 \text{ m}$$

Svar a) åtminstone 10 b) 49,3 m

10

a) Vi kan skriva om funktionen f på följande sätt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan^2 2x + 8 \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} && \left| \begin{array}{l} \text{sinus för dubbla vinkeln} \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{array} \right. \\ &= \tan^2 2x + 4 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x} && \left| \begin{array}{l} \text{cosinus för dubbla vinkeln} \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array} \right. \\ &= \tan^2 2x - 4 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} && \left| \begin{array}{l} \text{definition för tangens} \\ \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \end{array} \right. \\ &= \tan^2 2x - 4 \tan 2x \end{aligned}$$

Dvs. vi studerar $f(x) = \tan^2(2x) - 4 \tan(2x)$

Funktionen f är definierad när $2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, dvs när

$$x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

När x antar alla värden $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$ så antar $\tan 2x$ alla reella värden.

Vi sätter $\tan 2x = t$, där $t \in \mathbb{R}$, och undersöker funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = t^2 - 4t$. De värden som funktionerna g och f antar är samma, vilket ger att också deras minsta värden är samma.

Grafen $y = g(t)$ till funktion g är en parabel som öppnar sig uppåt. Den antar sitt minsta värde i parabelns topp, dvs. när

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

Det minsta värdet är

$$g(t_0) = g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

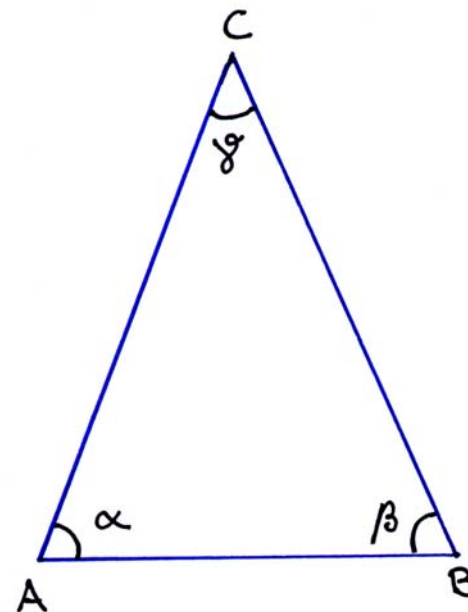
Då är också -4 minsta värdet för funktionen f .

Svar Funktionen minsta värde är -4

b) **Antagande:** För vinklarna α , β och γ i en triangel gäller $\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \sin^2 \gamma$.

Påstående: Triangeln är likbent.

Bevis: Vi ritar en figur.



Vinkelsumman i triangeln är 180° , vilket ger vinkeln $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Då är

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] && \left| \begin{array}{l} \text{sinus för komplementvinkeln:} \\ \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) \end{array} \right. \\ &= \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Högra ledet i antagandet blir då

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma &= \sin^2 (\alpha + \beta) & \left| \begin{array}{l} \text{ur tabellbok:} \\ \sin(x+y) \\ = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{array} \right. \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 & \left| \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \right. \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \end{aligned}$$

Vi formar om antagandets vänstra led:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha \sin 2\beta & \left| \begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right. \\ = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot 2 \sin \beta \cos \beta \\ = 4 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \end{aligned}$$

Dvs. antagandet får formen

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ = 4 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta, \end{aligned}$$

vilket ger

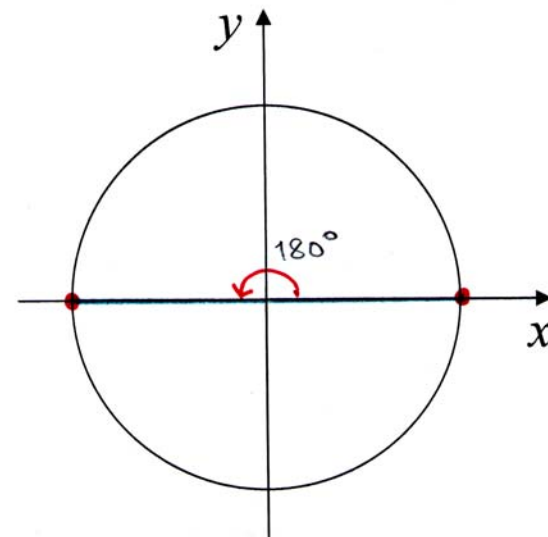
$$\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = 0$$

Eftersom $(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, kan vi nu skriva antagandet på formen

$$(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2 = 0$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 0$$

$$\sin(\alpha - \beta) = 0$$



$$\alpha - \beta = 0^\circ \quad \text{eller} \quad \alpha - \beta = 180^\circ$$

$$\alpha = \beta \quad \text{duger inte eftersom}$$

$$0^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$$

Eftersom $\alpha = \beta$, så är triangeln likbent. \square